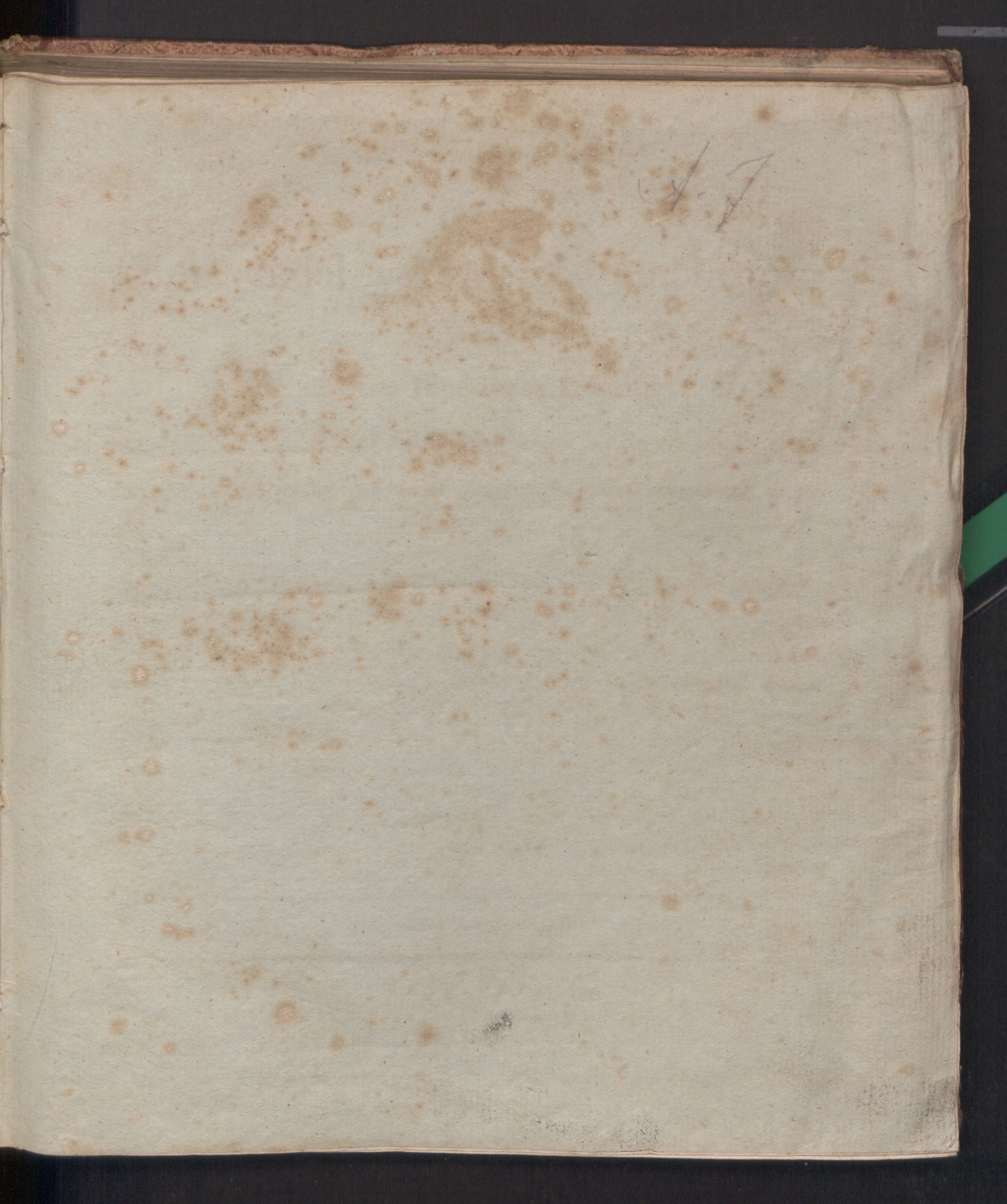








Gründliche Darstellung

der

Differenzial- und Integral-Rechnung

nach

der eigenen Idee ihres Erfinders;

nebst

vorangehender Prüfung der sonst gewöhnlichen Erklärungsarten dieser Wissenschaft.

Von

E. F. Wrede,

Professor der Philosophie und ordentlichem öffentlichen Lehrer der mathematischen Wissenschaften auf der Alberts-Universität.

Mit einer Kupfertafel.



Königsberg,

bei August Wilhelm Unzer.

1817.





Vorrede.

Die gegenwärtige Darstellung der Differenzial- und Integral-Rechnung, ist nicht eine bloſs veränderte Ansicht dieser Wissenschaft, sondern eine Entwickelung derselben aus denjenigen Grundbegriffen, welche Leibnitz selbst in seinem mathematischen Nachlasse niedergelegt hat. Ein sorgfältigeres Studium dieses letztern, würde schon längst die ursprüngliche Bedeutung der Differenzial-Rechnung völlig aufgeklärt, und eben dadurch manche Verunstaltung derselben, z. B. ihre Umschaffung in eine künstliche Nullen-Rechnung u. dgl. verhütet haben, wenn man sich nicht hätte die vorgefaſste Meinung leiten lassen, fürs Erste, daſs in den leibnitzisch-mathematischen Abhandlungen keine bestimmte Definizion eines Differenzials oder Differenzial-Kalkuls liege; weil ihr Verfasser selbst mit diesem Begriffe niemals aufs Reine gekommen sey: und fürs Zweite, daſs Sir Jsaac Newton, so wie Sir Colin Mac Laurin, weit besser als der deutsche Erfinder, die Gründe des Kalkuls mit veränderlichen Gröſsen ins Licht gesetzt habe.

Die vorliegende Schrift ist dazu bestimmt, dieses Vorurtheil zu widerlegen, und im Gegentheil zu beweisen, daſs schon die Benennung des Differenzial-Kalkuls nicht nur einen sehr bestimmten Begriff von der Natur desselben, und zugleich von einem Differenzial voraussetzt, sondern auch, daſs diese Begriffe in ihrer ganzen Bestimmtheit vorangehen muſsten, wenn eine Rechnung mit Differenzen richtig entworfen und zu Stande gebracht werden sollte. Der eben angegebene Zweck dieser Blätter, wird es leicht begreiflich machen, warum ihre erste Abtheilung die Prüfung derjenigen Systeme zum Gegenstande haben muſste, welche den in der Einleitung aufgestellten sehr einfachen

Mechanismus der Differenzial-Rechnung, theils besser erklären, theils besser begründen sollen, als es bereits bei dem Entstehen dieser Wissenschaft auf deutschem Boden geschehen ist.

Obgleich alle diese erklärenden und verbessernden Theorien, den eigentlichen Sinn des leibnitzischen Kalkuls mehr oder weniger verfehlt haben, so konnte sich doch eine Prüfung derselben, bei welcher es darauf ankam, den Schein der Einseitigkeit zu vermeiden, nicht bloſs damit begnügen, den Widerspruch zwischen ihnen und der ursprünglichen Gestalt des Differenzial-Kalkuls aufzudecken, sondern sie muſsten auch unabhängig von dieser gegenseitigen Beziehung, also hauptsächlich in Hinsicht ihrer innern Bündigkeit und Festigkeit näher beleuchtet werden. Es war daher nöthig, von den erwähnten Systemen hier so viele Begriffe und Sätze aufzustellen, als eine gründliche Beurtheilung des Ganzen erfoderte. Darum sind aus ihnen überhaupt, besonders aber aus der Theorie der Fluxions-Rechnung und der Gränzverhältnisse, mitunter Stellen ausgehoben, und ihre eigenen Worte gebraucht worden. Auch war dies die beste Art, jedem Verdacht vorzubeugen, als hätte man ihrem Inhalt wohl nicht immer die rechte Deutung gegeben.

Freilich werden sich noch manche Gegeneinwendungen machen lassen; denn auf alle nur mögliche konnte nicht Rücksicht genommen werden. Indessen da die vorangehende Prüfung der erklärenden und verbessernden Systeme so wenig, als die nachfolgende Darstellung der ursprünglichen Theorie der Differenzen-Rechnung übereilt ist, sondern sich auf vieljährigen Untersuchungen und Vergleichungen gründet: so dürfte wohl das Wichtigste überall gehörig erwogen worden seyn. Manche scheinbaren Einwürfe, machen keine besondere Beantwortung mehr nöthig; weil die letztere schon im Vortrage liegt, obgleich der ersteren dabei, Kürze halber, nicht ausdrücklich gedacht worden ist. Dahin gehört unter andern diejenige Ansicht der ersten und letzten Verhältnisse, welche in der bekannten hindenburgischen Schrift: Infinitinomii dignitatum leges ac formulae etc. Gotting. 1779. §. 1. vorkommt. Es werden nämlich bei wachsenden Gröſsen die ersten Incremente, bei abnehmenden aber die letzten Decremente als Verhältniſs-Maaſse betrachtet. Im ersten Theil der maclaurinschen Theorie der Fluxionen, findet sich eine ganz ähnliche Vorstellung, und

auf sie haben, bei jeder veränderlichen Gröſse, die drei Benennungen Fluent, Fluxion und Increment (Decrement) Bezug. Es ist aber im dritten Abschnitte der ersten Abtheilung dieser Schrift gezeigt worden, daſs hiebei alles auf die Frage ankommt: wie kann einerseits ein erstes oder letztes Verhältniſs, alle ihm ungleichen theils nachfolgenden theils vorhergehenden Verhältnisse messen? und wie läſst sich andererseits das erste Increment, so wie das letzte Decrement, als einen Verhältniſs-Exponenten ansehen, der in der Rechnung die Stelle aller übrigen von ihm und unter sich verschiedenen vertreten darf? Die Möglichkeit hievon hat keine bisherige Theorie der Fluxions-Rechnung deutlich dargelegt. Dies kann auch überhaupt nicht geschehen, wenn man der Sache tiefer auf den Grund geht, und veränderliche Gröſsen als Reihen miteinander vergleicht. Daher vermiſst man in der Darstellung der sogenannten Fluxions-Rechnung auch desto mehr die erforderliche Klarheit, je tiefer man ihre Grundlagen untersucht; und es ist sehr wahr, was Kästner in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen der höhern Analysis von der maclaurinschen Schrift sagt: „Viele der Beweise sind einander so ähnlich, daſs man nur Einen lesen darf, um sie alle zu übersehen. Aber bei einem Buche, das uns den vortrefflichsten Theil der mathematischen Erfindungskunst lehret, wäre wohl dienlich gewesen, selbst den Vortrag der Gründe so einzurichten, daſs man sähe, wie sie erfunden worden sind."

Bei dem leibnitzischen mathematischen Nachlasse, sofern er die Begründung des Differenzial-Kalkuls angeht, verhält sichs umgekehrt. Wenn der maclaurinsche Vortrag durch seine ermüdende Weitschweifigkeit, sowohl die Grundbegriffe als auch den gesetzlichen Einfluſs derselben, wie regulativer Prinzipe, auf den Mechanismus der Fluxions-Rechnung, in immer gröſseres Dunkel einhüllt; so ist dagegen der leibnitzische Vortrag fast zu wortkarg, und überläſst das Verständniſs dem eigenen Nachdenken des Lesers. Aber er ist so bestimmt und lichtvoll, daſs jede Dunkelheit, und jeder Gedanke an irgend ein Schwanken, oder gar an einen Widerspruch der Grundbegriffe verschwindet, sobald man die Entdeckung gemacht hat, daſs alle sich ununterbrochen (continue) und regelmäſsig verändernde Gröſsen, als Reihen betrachtet werden müssen. Diese einzige Vorstellung ist der Schlüssel zum ganzen Verständnisse, sowohl der Benennung als auch des algorithmischen Mechanismus der Differenzial-Rechnung. Es wür-

de überflüssig und unnütz gewesen seyn, hierüber ein dickleibiges Werk zu schreiben. Was im ersten, zweiten und dritten Abschnitte der zweiten Abtheilung über die Natur und nothwendige Verbindung des Differenzial-Kalkuls mit dem Integral-Kalkul gesagt worden ist, das wird gewifs hinreichen, einem jeden Anfänger beide begreiflich zu machen; denn die einzige Grundidee, dafs die beständigen Differenzen der veränderlichen Gröfsen, als Reihen betrachtet, zu beständigen Verhältnissen, Proportionen und Gleichungen dienen, ist so allgemein folgegebend für das ganze Rechnungs-Verfahren, dafs es sich an diesem Leitfaden von selbst entwickelt und verständigt.

Was nun noch übrig bleibt, ist dieses, unbezweifelt gewifs darzuthun, dafs die hier als Grundbegriff angenommene Vorstellung, das eigentliche leibnitzische Prinzip der Differenzial- und Integral-Rechnung sey. Um die Wahrheit dieser Voraussetzung zu beurkunden, ist in den ersteren Abschnitten der zweiten Abtheilung, nicht nur auf die wichtigsten eigenen Erklärungen des Erfinders der Differenzen-Methode hingewiesen, sondern sie sind auch, um derjenigen Leser willen, welche die Urschrift nicht immer habhaft werden können, hier wörtlich aufgenommen worden. So ist denn dieser Theil des vorliegenden Buchs für nichts anders anzusehen, als für eine treue Uebersetzung des den Differenzial-Kalkul angehenden leibnitzischen Nachlasses. In jener werden sich hoffentlich eben so wenig, als in diesem, Widersprüche finden: und das mag als ein Beweis für ihre Richtigkeit angesehen werden.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dafs diese Darstellung der Differenzial- und Integral-Rechnung, nur eine Einleitung im engsten Sinne in diese Wissenschaft und ihren Gebrauch bei den verschiedenen Zweigen der angewandten Gröfsenlehre seyn soll. Es kann ihr daher nicht zum Tadel gereichen, dafs sie keine ausführliche Anleitung zur Integral-Rechnung giebt. Eine solche war, bei dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissenschaft, hier eben so wenig ausführbar, als ein vollständiger Umrifs der höhern Mechanik. Der Zweck, um welches willen in gegenwärtiger Schrift einige Gegenstände aus der höhern Geometrie und Mechanik in Betrachtung gezogen worden sind, ist in der Abhandlung selbst bestimmt genug ausgesprochen. Es sind Beispiele, und zwar von der leichtverständlichsten Art, durch welche die Behauptung einleuchtender gemacht

werden sollte, daſs der Differenzial-Kalkul überall keine unendlich kleine Grössen oder Nullen, sondern in jedem nur gedenkbaren Rechnungsfall wirkliche, und allenfalls meſsbare, Differenzen bedürfe. Am unterrichtendsten werden hier die §§. 46, 47 und 48 von der Quadratur, Kubatur und Erfindung der Oberfläche krummlinig begränzter geometrischen Figuren seyn. Was aber in Hinsicht der wegzuwerfenden Binomial-Glieder sich bei diesen Gegenständen als gesetzlich zeigt, das wird man mit leichter Mühe in allen übrigen Theilen der angewandten höheren Analysis, in der Statik fester Körper, in der Hydrostatik, z. B. bei der Berechnung des Wasserdrucks auf geneigte oder horizontal stehende Wände der Gefäſse, wie auch in der gesammten Dynamik wieder finden. Also zwingt uns weder die objective Natur, noch die eigenthümliche Beschaffenheit des Differenzial-Kalkuls, irgendwo das zweideutige Unendlich-Kleine den Rechnungen mit veränderlichen Gröſsen zum Grunde zu legen, und Kästner hat in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen sehr wahr gesprochen, indem er sagt: „Daſs die Geometrie das Unendliche aus der Naturlehre haben sollte, ist so unrichtig, daſs man vielmehr das Unendliche aus der Geometrie in die Naturlehre durch Schlüsse hat bringen wollen.“ Daſs aber das sogenannte Unendliche in der Geometrie wieder nichts anders sey, als beständige Differenzen aus arithmetischen und geometrischen Reihen, wird sich aus dem Inhalte des dritten Abschnitts in der zweiten Abtheilung der gegenwärtigen Schrift eben so leicht einsehen lassen, als aus dem letzten Abschnitte die Wahrheit einleuchten muſs, daſs die Fruchtbarkeit des Differenziirens und Integrirens da wegfällt, wo entweder die Veränderungen unbeständiger Gröſsen ganz gesetzlos vor sich gehen, oder die Veränderungsform der bezeichneten durch die Veränderungsform der bezeichnenden Gröſse nicht richtig ausgedrückt wird. Von dieser Seite den Differenzial-Kalkul betrachtend, muſs ein jeder sich überzeugen können, daſs eine Kenntniſs seiner wahren Gründe ganz unentbehrlich sey; weil ohne die letztere nicht nur das rein mechanische Zusammensetzen, sondern auch ein solcher Gebrauch analytischer Functionen, immer eine unsichere Arbeit bleiben muſs. Dies ist es, was die eingestreuten Bemerkungen im letzten Abschnitt, über die allgemeinen Gründe der Mechanik und das Verhältniſs der Differenzial-Rechnung zu ihr sagen wollen.

Mögen diese Vorerinnerungen zu einer günstigen Aufnahme der gegenwärtigen Schrift, und sie selbst dazu beitragen, dem eben so wohlthätigen als unentbehrlichen Studium der höhern Analysis, nicht nur bei angehenden Mathematikern von Beruf, sondern auch bei Liebhabern der Grösenlehre überhaupt, einen leichtern Eingang zu verschaffen.

Geschrieben im März 1817.

vom Verfasser.

Inhalts-

Inhalts-Verzeichniſs.

Zweite Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Gründliche Darstellung

der

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Einleitung.

Die Rechnung mit veränderlichen Gröſsen, welche von neueren Mathematikern auch die Benennungen höherer Kalkul, höhere Analysis, Functionen-Kalkul u. s. w. erhalten hat, zerfällt in zweierlei Verrichtungen, von denen die vorhergehende das Differenziiren, die nachfolgende das Integriren genannt wird. In sehr wenigen Rechnungsfällen reicht man mit dem ersteren allein aus; in den allermehresten aber ist auch das letztere nöthig. Es hält schwer sich von beiden zusammengehörigen Rechnungen einen deutlichen Begriff zu machen, ohne die mechanische Verrichtung wenigstens der ersteren zu Hülfe zu nehmen. Hiemit soll nicht gesagt werden, daſs es an sich unmöglich sey, von dieser Wissenschaft einen deutlichen Begriff, unabhängig von aller Betrachtung ihres arithmetischen Mechanismus, zu Stande zu bringen; sondern daſs man durch diese Betrachtung sich erst auf den rechten Standpunct erheben müsse, wo die allgemein gestellte Frage, wie mit veränderlichen Gröſsen überhaupt gerechnet werden könne, sich im Allgemeinen beantworten läſst. Das Bedürfniſs einer solchen Art zu rechnen, hat man seit Anbeginn der vollkommenern Ausbildung mathematischer Erkenntnisse gefühlt, aber auch eben so früh schon eingesehen, daſs die Behandlungsweise beständiger Gröſsen hier keine unmittelbare Anwendung leide. Erst im siebenzehnten Jahrhundert gelang es einem unvergeſslichen Deutschen, Leibnitz, ein Mittel zu finden, mit Hülfe dessen alle veränderliche Gröſsen grade so in Rechnung genommen werden können, als wären sie unveränderlich. Dieses einfache Mittel besteht darin, daſs man der veränderlichen Gröſse eine Gestalt giebt, welche ihr Differenzial heiſst, und sich zu denselben Verhältnissen, Proportionen und

Gleichungen gebrauchen läſst, wie sie in der gemeinen Arithmetik vorkommen. So leicht es ist, ein Differenzial finden und von anderen seiner Gattung unterscheiden zu lernen: für so schwierig hat man es von je her gehalten, eine ganz genügende Erklärung davon zu geben. Die Meinungen über die eigentliche Bedeutung desselben sind so verschieden, und zum Theil so unvereinbar, daſs es kaum begreiflich ist, wie eine Wissenschaft, über deren Gründe man sich nicht einigen konnte, bei aller Widerspenstigkeit der Ansichten, dennoch im Stande war, zu den sichersten Schluſsfolgen hinzuführen, so oft man nur keine Fehler in Hinsicht ihres arithmetischen Mechanismus und der aufzulösenden Aufgabe selbst beging. Was den ersten Theil des gedachten Mechanismus, die Differenziation betrifft, so ist er ganz vollendet, indem keine veränderliche Gröſse gegeben werden kann, welche sich nicht nach den weiterhin folgenden Regeln differenziiren lieſse. Weniger ausgeführt erscheint die Integralrechnung, wenn man erst näher mit ihr bekannt wird. Indessen hindert dies nur soviel, den höhern Kalkul überall ohne Schwierigkeit anzuwenden, keinesweges aber die Integralrechnung selbst und ihren Zweck vollkommen zu verstehen. Sie ist eine dem Differenziiren entgegen gesetzte Verrichtung, und führet von den Differenzialen zu denjenigen veränderlichen Gröſsen zurück, durch deren Differenziation jene entstehen (wenn gleich nicht immer gradezu entstanden sind). Hieraus leuchtet ein, daſs zum Verständnisse beider arithmetischen Verrichtungen erfodert wird, zuförderst mit dem Begriff eines Differenzials aufs Reine zu kommen. Da dieser letztere nicht nur den scharfsinnigsten Zeitgenossen des Erfinders der Differenzialrechnung, sondern auch den gröſsten Analysten späterer Zeit so viel zu schaffen gemacht hat, daſs man im Verlauf eines ganzen Jahrhunderts darüber nicht hat einig werden können: so würde es ein gewagtes Unternehmen zu seyn scheinen, wenn man im Voraus einen Begriff aufstellen wollte, der von allen bisher gegebenen, den ursprünglich leibnitzischen ausgenommen, abweicht. Es ist daher nöthig, den Leser auf diesen ganz abweichenden ursprünglichen Begriff dadurch allmählig vorzubereiten, daſs die Unhaltbarkeit und das Widersprechende der gewöhnlichen Erklärungsarten des Differenzial-Kalkuls nach der Reihe aufgedeckt wird. Um aber eine solche Arbeit so viel als möglich zu kürzen, ist es diensam, den Grundriſs der Differenzial-Rechnung voran zu schicken; weil mit ihm jede hier zu prüfende Theorie gegen

einander gehalten werden muſs, wenn es entschieden werden soll, ob sie ihrem Gegenstande entspricht oder nicht. Ein kurzer Umriſs dieses Kalkuls läſst sich um so leichter geben, da es angeht, sein ganzes Verfahren in zehn Regeln zusammen zu fassen. Dabei ist nur nöthig, den Begriff einer Function, einer veränderlichen Gröſse und ihres Increments vorläufig zu bestimmen. Unter dem ersten Ausdruck versteht man jeden Verbindungs-Zustand (Aggregat-Zustand) einer veränderlichen Gröſse mit beständigen Coefficienten oder anderen beständigen Theilen des Ganzen, z. B. $x^n = 1 . x^n$ oder $ax - x^2$, $\frac{x + ax^{\frac{1}{2}}}{a + x^2}$ u. a. m.; unter dem zweiten eine Gröſse, die ununterbrochen entweder vermehrt oder vermindert wird, wie unter andern die Geschwindigkeit fallender oder gegen die Richtung der Schwere ansteigender Körper; unter dem dritten endlich dasjenige, wodurch die zu- oder abnehmende Gröſse allmählig vermehrt oder vermindert wird. Ein Differenzial erhält man, zufolge des arithmetischen Mechanismus des höhern Kalklus, wenn jeder veränderliche Theil x, y oder z einer Function, um sein Increment ∂x, ∂y, oder ∂z (im neuern Functionen-Kalkul um i) vermehrt, in gewissen Fällen vermindert, mit ihm als Binomium auf die gegebene Potenz erhoben, und nun die anfängliche (primitive) Function von der veränderten abgezogen wird. Hieraus geht für die Differenzialrechnung eine allgemeine Hauptregel hervor:

Erste Regel.

Man vermehre die veränderliche Gröſse um ihr Increment, stelle die gegebene Potenz her, und ziehe den ersten Zustand vom zweiten ab.

Hienach ist unter andern $x \pm \partial x - x = \pm \partial x$ das Differenzial von x, und $a - (y + \partial y) - (a - y) = - \partial y$ das Differenzial von $a - y$. In dieser allgemeinsten Regel sind alle folgenden begriffen, welche die Differenziation der algebraischen, logarithmischen, exponentialen und trigonometrischen Functionen angehen. Um die Uebersicht zu erleichtern, mögen hier, wie gewöhnlich, diese viererlei Functionen von einander getrennt, und die Regeln, nach welchen eine jede Gattung für sich zu differenziiren ist, unter besonderen Absätzen zusammengestellt werden.

I. Differenziation der sogenannten algebraischen Functionen.

Unter dieser Benennung begreift man alle veränderliche Gröſsen mit einem beständigen Exponenten, er mag positiv oder negativ, eine ganze oder gebrochene Zahl seyn. Eben so kann die Function selbst die Gestalt einer positiven oder negativen, ganzen oder gebrochnen, einer Summe oder Differenz, eines ein- oder mehrgliedrigen Products, einer algebraisch rationalen oder irrationalen Gröſse haben.

Zweite Regel.

Das Differenzial einer algebraischen Function von der Form x^n wird gefunden, wenn man den beständigen Exponenten zum Coefficienten macht, ihn in der Potenz um Eins vermindert, und die Function in dieser Gestalt mit ihrem Increment (oder Differenzial in der ersten Potenz) multipliciret.

Es ist nämlich $\partial(x^n) = nx^{n-1}\partial x$, zufolge der ersten Regel, nach welcher $(x + \partial x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\partial x^2 + \ldots\ldots - x^n = nx^{n-1}\partial x$ zum Vorschein kommt, wenn man alle Glieder nach dem zweiten in der Reihe, oder nach der ersten abgeleiteten Function nx^{n-1} wegwirft. Ein Verfahren, welches durch mancherlei Voraussetzungen zu rechtfertigen gesucht worden ist, und dessen wahrer Grund weiter unten in der zweiten Abtheilung dieser Schrift nachgewiesen werden soll. Hier ist für jetzt nur zu bemerken, daſs das Differenzial einer jeden veränderlichen Gröſse wie $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^3 u. s. w. sehr schnell gefunden werden kann, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck $nx^{n-1}\partial x$, die Gröſse n mit ihrem vorgeschriebenen Werthe vertauscht, z. B. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\partial x = -\frac{\partial x}{2x^{\frac{3}{2}}}$ u. a. m. Wäre X eine zusammengesetzte Function von x, so würde $nX^{n-1}\partial(X)$ die allgemeine Differenzial-Form für X^n seyn, wo es aus dem zweiten Beispiel für die erste Regel zu ersehen ist, was geschehen muſs, um $\partial(X)$ zu erhalten.

Dritte Regel.

Das Differenzial der Summe veränderlicher Gröſsen, ist gleich der Summe der Differenziale aller einzelnen.

Zufolge dieser Vorschrift ist z. B. $\partial(x^3 + y^2 - z) = 3x^2\partial x + 2y\partial y - \partial z$: $\partial(ax^2 - cz^3) = 2ax\partial x - 3cz^2\partial z$.

Vierte Regel.

Das Differenzial eines Products veränderlicher Factoren wird gefunden, wenn man jede Union, Binion, Ternion u. s. w. mit dem Differenzial desjenigen Factors multiplicirt, welcher nicht selbst ein Bestandtheil der Combination ist.

Folgende Beispiele gehören unter diese Regel, wobei die Hauptregel zur Erklärung dient.

1. $\partial(xy) = (x + \partial x)(y + \partial y) - xy = xy - xy + x\partial y + y\partial x + \partial x \partial y = x\partial y + y\partial x$; weil $\partial x \partial y$ weggeworfen wird. So würde $x^2 y^3$ das Differenzial $3x^2 y^2 \partial y + 2y^3 x\partial x$ geben. Hier ist jede Union mit dem Differenzial der andern multiplicirt worden.

2. Das Product xyz giebt drei Verbindungen zu zwei Factoren, xy, xz, yz, also das Differenzial $xy\partial z + xz\partial y + yz\partial x$, welches $= (x + \partial x)(y + \partial y)\, z + \partial z) - xyz$ ist, wenn die vier Glieder $x\partial y\partial z + y\partial x\partial z + z\partial x\partial y + \partial x\partial y\partial z$ weggeworfen werden.

3. Das Product $vxyz$ giebt folgende vier Ternionen: $vxy + vxz + vyz + xyz$, also das Differenzial $vxy\partial z + vxz\partial y + vyz\partial x + xyz\partial v$.

Fünfte Regel.

Das Differenzial eines veränderlichen Bruchs ist gleich der Differenz beider Wechselproducte, nämlich des Nenners in das Differenzial des Zählers, vermindert um das Product des Zählers in das Differenzial des Nenners, und dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Hienach hat man $\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$, welches vermittelst der vorhergehenden Regel sehr leicht aus xy^{-1} abgeleitet werden kann, indem $\partial(xy^{-1})$ $= y^{-1}\partial x - xy^{-2}\partial y = \frac{y\partial x}{yy} - \frac{x\partial y}{yy}$ ist. Functionen wie $\frac{x}{yz}$ oder $\frac{xy}{z}$ und ähnliche, erfodern die Anwendung nicht nur der gegenwärtigen, sondern auch der vorhergehenden Regel; denn es ist $\partial\left(\frac{x}{yz}\right) = \frac{yz\partial(x) - x\partial(yz)}{(yz)^2}$ u. s. w.

II. Differenziation logarithmischer Functionen.

Sechste Regel.

Das Differenzial eines natürlichen Logarithmen ist gleich dem Differenzial der Function dividirt durch die Function selbst.

Zufolge dieser Regel ist $\partial(\text{logn}\, x) = \frac{\partial x}{x}$, und $\partial(\text{logn}\,(a-x)) = -\frac{\partial x}{a-x}$. Um den erstern dieser beiden Ausdrücke vermittelst der Hauptregel zu erhalten, mufs $\text{logn}\,(x+\partial x) - \text{logn}\, x = \text{logn}\left(1 + \frac{\partial x}{x}\right)$, der Theorie der Functionen gemäfs in die Reihe $\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial x^2}{2x^2} + \frac{\partial x^3}{3x^3} - \frac{\partial x^4}{4x^4} + \ldots$ aufgelöset und jedes Glied nach dem ersten weggeworfen werden. Setzt man die Function $a - x = z$, so ist $x = a - z$, $\partial x = \partial(a-z) = -\partial z$, oder $-\partial x = \partial z$, also $\frac{\partial z}{z} = -\frac{\partial x}{a-x}$ u. a. m.

III. Differenziation der Exponentialgröfsen.

Ist die veränderliche Gröfse irgend einer Function der Exponent der Potenz, wie in a^x, y^z, x^x, u. dgl. so nennt man sie eine Exponential-Gröfse. Ihr Differenzial wird nach folgender Vorschrift gefunden:

Siebente Regel.

Das Differenzial einer Exponentialgröfse ist gleich der gegebenen Function multiplicirt mit dem Differenzial ihres natürlichen Logarithmen.

Hienach wird $\partial(a^x) = a^x\, \partial(\text{logn}\, a^x) = a^x\, \partial(x\, \text{logn}\, a) = a^x\, \partial x\, \text{logn}\, a$. Denn $a^x = y$ gesetzt, giebt $x\, \text{logn}\, a = \text{logn}\, y$, also $\frac{\partial y}{y} = \partial x\, \text{logn}\, a$, das heifst $y \partial x\, \text{logn}\, a = \partial y$, und wenn jetzt gehörig vertauscht wird, $\partial(a^x) = a^x\, \partial x\, \text{logn}\, a$. Auf ähnliche Weise erhält man $\partial(y^z) = y^z\left(\partial z\, \text{logn}\, y + \frac{z \partial y}{y}\right)$ aus der Gleichung $z\, \text{logn}\, y = \text{logn}\, u$, und $\partial(x^x) = x^x\, \partial x\, (\text{logn}\, x + 1)$ aus der Gleichung $x\, \text{logn}\, x = \text{logn}\, v$, mit Zuziehung der vierten Regel.

IV. Differenziation trigonometrischer Functionen.

Unter einer trigonometrischen Function versteht man irgend eine veränderliche trigonometrische Linie, diese mag der Sinus, Cosinus, oder die Tangente,

Secante u. s. w. seyn. Hat man das Differenzial für den Sinus und Cosinus eines veränderlichen Kreisbogens gefunden, so ist es leicht, die Differenziale der übrigen trigonometrischen Functionen von ihnen abzuleiten. Daher kann man hier mit folgenden zwei Regeln ausreichen, die sich auf den bekannten Formeln der analytischen Trigonometrie gründen.

Achte Regel.

Das Differenzial des Sinus eines veränderlichen Bogens, ist gleich dem zugehörigen Cosinus multiplicirt mit dem Increment des Bogens.

Nennt man den Bogen φ, so ist sein Increment $\partial\varphi$, sein Sinus $= \sin\varphi$ und sein Cosinus $= \cos\varphi$: also $\partial(\sin\varphi) = \cos\varphi\,\partial\varphi$. Denn zufolge der Hauptregel hat man $\partial(\sin\varphi) = \sin(\varphi + \partial\varphi) - \sin\varphi = \sin\varphi \cos\partial\varphi + \cos\varphi \sin\partial\varphi$, das heifst, wenn $\partial\varphi$ sehr klein genommen wird, unter welcher Bedingung nicht nur $\sin\partial\varphi = \partial\varphi$ sondern auch $\cos\partial\varphi = 1$ gesetzt werden darf, $\partial(\sin\varphi) = \cos\varphi\,\partial\varphi$.

Neunte Regel.

Das Differenzial des Cosinus eines veränderlichen Bogens, ist gleich dem negativen Product des zugehörigen Sinus in das Increment des Bogens.

Hienach erhält man $\partial(\cos\varphi) = -\sin\varphi\,\partial\varphi$. Denn zufolge der Hauptregel ist $\partial(\cos\varphi) = \cos(\varphi + \partial\varphi) - \cos\varphi = \cos\varphi\cos\partial\varphi - \sin\varphi\sin\partial\varphi - \cos\varphi = - \sin\varphi\,\partial\varphi$, nämlich unter der obigen Bedingung, dafs $\cos\partial\varphi = 1$ und $\sin\partial\varphi = \partial\varphi$ gesetzt werden dürfe.

Alle übrigen trigonometrischen Differenziale sind von beiden vorhergehenden grade so abhängig, wie die übrigen trigonometrischen Functionen vom Sinus und Cosinus. Daher hat man mit Zuziehung einiger der vorhergehenden Regeln, besonders der vierten, siebenten und achten, das Differenzial der Tangente aus $\partial\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$, der Cotangente aus $\partial\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)$ oder $\partial\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}\right)$, der Secante aus $\partial\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)$ u. s. w. Ausser diesen giebt es noch Differenziale veränderlicher Kreisbogen, durch irgend eine trigonometrische Function ausgedrückt,

z. B. $\partial\,(\text{arc}\sin y) = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$ oder $\partial\,(\text{arc}\cos y) = \frac{-\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$ u. s. f. welche insgesammt weiter unten Abth. 2. Abschn. 3. §. 42. Num. III. u. IV. vorkommen.

V. Fortgesetzte Differenziation aller vorhergehenden ersten Differenziale, oder Differenzio-Differenziation.

Es ist in der Rechnung mit veränderlichen Gröſsen oft nöthig, das Differenzial eines Differenzials zu suchen. Ein solches nennt man, wenn dieses das erste ist, das zweite, und das seinige wieder das dritte Differenzial. Auf die Weise lassen sich durch fortgesetzte Differenziation alle höhere Differenziale nach folgender allgemeinen Regel finden:

Zehnte Regel.

Um ein höheres Differenzial aus dem zunächst vorhergehenden zu entwickeln, betrachte man das Increment als eine beständige Gröſse, und differenziire die Differenzial-Function aufs neue, nach Maaſsgabe ihrer besonderen Gestalt.

Diese besondere Gestalt der Differenzial-Functionen, kommt nicht immer mit der besonderen Gestalt ihrer ursprünglichen Function überein. So wird die Differenzial-Function einer logarithmischen Function ein veränderlicher Bruch z. B. $\frac{\partial x}{x}$, und läſst sich nun nicht mehr nach der sechsten Regel, sondern bloſs nach der fünften weiter differenziiren. Daher kommt es bei der Differenzio-Differenziation auf eine genaue Betrachtung der besonderen Gestalt an, welche dem weiter zu differenziirenden Differenzial eigen ist. Hiebei ist noch zu bemerken, daſs jedes zweite, dritte, vierte ..... Differenzial durch ∂^2, ∂^3, ∂^4 ...... angedeutet wird, wie in folgenden Beispielen:

1. $\partial^2\,(x^n) = \partial\,(nx^{n-1}\,\partial x) = n\partial x\,.\,\partial\,(x^{n-1}) = n\,(n-1)\,x^{n-2}\,\partial x^2$, nach der zweiten Regel.

2. $\partial^2\,(xy) = \partial\,(x\partial y + y\partial x) = 2\,\partial x\partial y$, nach der ersten und dritten Regel, anstatt daſs $x\partial y + y\partial x$ nach der vierten erhalten wird.

3. $\partial^3\left(\frac{x}{y}\right) = -\,\partial\left(\frac{2y\partial y\,[x\partial y + y\partial x]}{y^4}\right) = \frac{6\,\partial y^2\,(x\partial y + y\partial x)}{y^4}$, nach der dritten, vierten und fünften Regel zugleich.

4. $\partial^3(\text{logn}[a-x]) = \partial\left(\frac{\partial x^2}{(a-x)^2}\right) = \frac{2\,\partial x^3}{(a-x)^3}$, nach der zweiten und fünften Regel, anstatt daſs $\partial(\text{logn}[a-x]) = \frac{-\partial x}{a-x}$ nach der sechsten entwickelt werden muſste.

Auch für den Fall ist diese Regel gültig, wenn das Increment als veränderlich angesehen werden muſs, welches von besonderen Umständen und gegenseitigen Beziehungen einiger Functionen abhängt. Denn jetzt kürzt sich die Regel ab, und lautet:

Man differenziire die vorgelegte Differenzial-Function aufs neue, nach Maaſsgabe ihrer besonderen Gestalt.

Ueberhaupt finden in der Differenzio-Differenzial-Rechnung dieselben Regeln Statt, nach welchen die ersten Differenziale entwickelt werden müssen, und es ist überall nichts anders erforderlich, als die fortgesetzte Wiederholung der besonders vorgeschriebenen Verrichtungen von Reg. 2. bis 9. Einfacher kann in der That keine Rechnungsart gefunden werden, deren Gebiet mit dem des Differenzial-Kalkuls gleichen Umfang hat; und eine solche Erfindung verdient gerechte Bewunderung, sobald sich erweisen läſst, daſs sie die Frucht nicht eines glücklichen Zufalls, sondern eines unermüdeten Nachdenkens gewesen ist. Die vortreffliche Einstimmung aller vorhergehenden Regeln, sie mögen so oft als man will wiederholt, oder wie die zweite, vierte und fünfte mit einander verwechselt werden, gebietet die Annahme sehr feststehender Grundsätze, auf welchen diese ganze Wissenschaft fuſset. Nur ist man über die Grundsätze nicht einverstanden gewesen, daher denn immer noch zwei wichtige Fragen zu beantworten blieben:

1. Worauf beruhet die Möglichkeit, daſs man mit Differenzialen oder abgeleiteten Functionen grade so rechnen kann, wie mit beständigen Gröſsen?
2. Worin gründet sich die arithmetische Nothwendigkeit, daſs beim Differenziiren manche Theile der Differenzen vernichtet werden müssen?

Die Antwort auf die erste Frage hängt ganz von dem wahren Begriff eines Differenzials ab, daher sie auch so gestellt werden konnte:

Was ist ein Differenzial?

Es läſst sich nicht läugnen, daſs die bisherigen Definitionen, welche von den Auslegern der leibnitzischen Differenzen-Methode gemacht worden sind, desto weniger befriedigen, je weiter man sie zergliedert. Die zweite Frage ist von verschiedenen Mathematikern, unter denen wir auch den berühmten Leonhard Euler zählen, mit noch weit gröſserer Aufmerksamkeit als die erste in Erwägung gezogen worden; aber mit keinem glücklichern Erfolge. Denn anstatt einer einzigen wahren Antwort, welche einmüthig als eine solche hätte anerkannt werden müssen, traten sehr verschiedene Hypothesen hervor, die Partheien bildeten; weil sie theils untereinander theils mit sich selbst im Widerspruch begriffen waren, wie die folgende Prüfung derselben lehren wird. Es bleibt also, nachdem man allerlei Versuche gemacht hat, dieses Dunkel aufzuhellen, kein anderes Mittel mehr übrig, als zu untersuchen, ob vielleicht die wahren Principien der Differenzial-Rechnung in dem schriftlichen Nachlasse ihres Erfinders niedergelegt worden sind. So viel darf hier vorläufig bemerkt werden, daſs kein vorurtheilsfreier Forscher Ursache hat, sich durch die Behauptung einiger neueren Schriftsteller, Leibnitz sey über die Grundbegriffe seines Kalkuls mit sich selbst nicht einig gewesen, von einer solchen Untersuchung abschrecken zu lassen. Es wird sich weiter unten zeigen, daſs sie keine gering zu achtende Ausbeute giebt.

Erste Abtheilung.

Prüfung der sonst gewöhnlichen Erklärungsarten der Differenzial- und Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Prüfung der gemeinen Infinitesimalrechnung als Grundlage des höheren Kalkuls betrachtet, nebst einer Untersuchung über den Begriff des mathematisch Unendlichen.

§. 1.

Die Meinung, Leibnitz habe seinen Kalkul auf den Begriffen vom Unendlich-Kleinen und Grofsen gegründet, ist so herkömmlich, dafs man die Ausdrücke Infinitesimal- und Differenzial-Rechnung als gleichbedeutend anzusehen pflegt. Zwar läfst sich nicht läugnen, dafs in seinen Schriften *) die Namen Calculus indefinite parvorum, Calculus differentialis et summatorius, Calculus tetragonisticus, Analysis indivisibilium, und Analysis infinitorum abwechselnd, obgleich nicht ohne allen Unterschied gebraucht werden. Iedoch ist es eine geschichtliche Thatsache, dafs Niemand mehr, als Leibnitz selber, sogar die Möglichkeit unendlich grofser und kleiner Gröfsen, Linien, Flächen, Körper u. s. w. in Anspruch genommen und aus dem Kalkul zu verweisen gesucht hat. Man lese nur das Commercium philosophicum et mathematicum von ihm und Iohann Bernoulli: so wird sich finden, dafs er mit seinem gelehrten Freunde einen langen Streit über diesen Gegenstand geführt, das Unendlich-Kleine sehr bestimmt verworfen und an seiner Stelle nur unbestimmt kleine Gröfsen (indefinite parva) verstattet habe. Es sind überhaupt dreizehn Briefe im ersten Theil der angeführten Sammlung vorhanden, der 72, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88ste, in denen Bernoulli den Satz zu vertheidigen

*) Leibnitzii Opera omnia, coll. studio Dutens, Tom. III. pag. 191, 193.

suchte, daſs in einer Reihe, wie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ irgend ein Glied das unendlichste jedoch darum noch nicht das letzte seyn müſste. Leibnitz deckte nicht nur den Widerspruch in dieser Behauptung auf, sondern ging noch weiter, indem er überhaupt die Möglichkeit unendlich groſser und kleiner Gröſsen in Zweifel zog, ja sogar in den Actis Erudit. Lips. 1712 öffentlich erklärte, daſs der Ausdruck „unendliche Zahl" und „unendliche Linie" ganz unstatthaft sey, wenn er für etwas anders, als eine bloſse Redensart angesehen würde. Aus diesem allen scheint hervorzugehen, daſs der Begriff des Unendlich-Kleinen mehr von L'Hôpital *) und Iohann Bernoulli, als von Leibnitzen selbst in den Differenzial-Kalkul eingeführt worden, und eben darum das Ding nicht sey, dessen Betrachtung, wie I. L. Lagrange meint, diese algorithmische Erfindung veranlaſst hat. Ueberdem ist es in den Actis Erud. Lips. in dem Commercio philos. et mathem. und in andern Sammlungen leibnitzischer Aufsätze genugsam beurkundet:

1. daſs der deutsche Erfinder des Differenzial-Kalkuls, als er diesen dem Engländer Isaac Newton mittheilte, ganz andere Gründe von dem Wegwerfen einiger Glieder in den Differenzial-Functionen angab, als das Verschwinden der höhern Potenzen unendlich kleiner Brüche gegen ihre erste Potenz. **)

2. Daſs Leibnitz bloſs in Hinsicht der Anwendung des Differenzial-Kalkuls auf Gegenstände der Geometrie, das unbestimmt Kleine (indefinite parvum) gebrauchen muſste, mehr um gewisse dreieck- und trapezien-ähnliche Figuren für die äussere Anschauung zu erhalten, als seinen durch freies Nachdenken zu Stande gebrachten Begriffen über die Natur und den Nutzen der Differenzen im Kalkul, dadurch einen Stützpunct zu verschaffen.

So läſst sich nun mit mehrerm Recht behaupten, der Erfinder der Differenzial-Rechnung habe an das mathematisch-Unendliche nicht einmal geglaubt.

---

*) Dieser schrieb 1696 seine Analyse des infiniment petits, und wie es scheint nach Joh. Bernoullis Entwurf, als das erste Lehrbuch der Differenzialrechnung.

**) Diese Bekanntmachung geschah im Jahr 1677. Vergl. Leibn. Op. omn. T. III. pag. 80. ff. Bei der Differenziation von y^2 heiſst es: „omisso quadrato quantitatis ∂y (ob rationes ex methodo de Maximis et Minimis notas)" etc. Es ist hier die Methode des Fermat zu verstehen. Vergl. S. 97.

§. 2.

Es ist auch neueren Mathematikern beim Durchlesen der leibnitzischen Aufsätze in den Actis Erud. Lips. keinesweges entgangen, daſs ihr Verfasser sogar die Möglichkeit des Unendlich-Groſsen und Kleinen abgeläugnet habe. Nur glaubten sie dort den Beweis für die Unstatthaftigkeit und Entbehrlichkeit desselben in mathematischer Hinsicht, nicht zu finden*). Allein dieser Beweis ist sehr vollständig im dem Commercio philos. et mathem. a a. O. enthalten, und schon funfzehn Jahre älter, als die Bekanntmachung in den Act. Erud. Lips, von 1712. Er nimmt ohngefähr folgenden Gang. Die Meinung, als stelle man sich etwas Unendliches vor, wenn eine (bernoullische) Reihe, wie

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{\infty-2}} + \frac{1}{2^{\infty-1}} + \frac{1}{2^{\infty}} + \frac{1}{2^{\infty+1}} + \frac{1}{2^{\infty+2}} \ldots$$

gedacht wird, in welcher irgend ein Glied $\frac{1}{2^{\infty}}$ das unendlichste jedoch auch nicht das letzte seyn soll, ist ein leeres Blendwerk. Denn fürs Erste ist die ganze Reihe nicht gröſser als 2, folglich schon an sich keine unendliche Gröſse. Fürs Zweite, der Ausdruck „ein Glied muſs das unendlichste seyn, aber noch immer andere auf sich folgen lassen“ heiſst nichts weiter, als ein Glied muſs den Anfang machen ein unendlichstes zu seyn. Aber dann ist das nächstvorhergehende noch ein endliches, und nun muſs das Endliche um Eins vermehrt etwas Unendliches seyn. Eine klare Ungereimtheit! Fürs Dritte, mögen die Glieder in der Reihe beschaffen seyn, wie sie wollen, es streitet gegen die Einrichtung des menschlichen Vorstellungs-Vermögens, eine Unendlichkeit von Einheiten oder endlichen Gröſsen jemals zu Stande zu bringen; weil dazu eine unendliche Zeit erfoderlich ist. Aber eine solche kann niemals wie beendigt, oder eine Ewigkeit als abgelaufen betrachtet werden.

In der That, gegen diese Gründe läſst sich nichts Erhebliches einwenden. Vielmehr muſs jeder Unbefangene ihre Beweiskraft um so mehr fühlen, da es im Gebiete der Geometrie nicht möglich ist, etwas Unendliches, z. B. eine unendliche Linie ganz begreiflich zu machen, so oft auch davon die Rede seyn mag. Denn bestimmt man eine Linie dergestalt, daſs sie die Gränze einer Fläche, diese die Gränze eines Körpers ist: so setzt eine unendliche Linie eine unendliche Fläche, und diese wieder einen unendlichen Körper voraus. Es ist aber ein

*) Joh. Schultz Theorie des Unendlichen. Königsb. und Leipz. 1788. S. 61.

Körper ein von Flächen oder Ebenen begränzter Raum; und ein unendlicher Körper müſste ein von Flächen begränzter unendlicher d. i. unbegränzter Raum seyn: welches ein offenbarer Widerspruch ist. Auf diesem Wege kann also Niemand zu einer Vorstellung von einer unendlichen Linie oder Fläche gelangen: daher sind beide subjectiv unmöglich. Schlägt man den andern Weg ein, wo eine Linie durch die Bewegung eines Puncts, eine Fläche durch die Bewegung einer Linie u. s. w. entstehen soll: so macht man die Vorstellung einer unendlichen Linie, Fläche u. s. f. von der Zeit abhängig, welche von der Bewegung unzertrennlich ist, und es kann eine unendliche Linie etc. nicht eher, als nach Ablauf einer unendlichen Zeit, das heiſst gar nicht vollendet werden. Eben so kommt die Sache zu stehen, wenn man zwar den Ausdruck „Bewegung" verschweigt, aber dafür genöthigt ist zu sagen: eine unendliche Linie, Fläche, Zahl u. s. w. ist diejenige, welche ohne Aufhören wächst. Denn hier ist die Vorstellung ebenfalls wieder an eine unendliche Zeit gebunden.

Leibnitz hatte demnach sehr recht, das Unendlich-Kleine sowohl, als das Unendlich-Groſse von seinem Differenzial-Kalkul zurück zu weisen. Denn eine unendlich kleine Gröſse würde ein Bruch seyn, dessen Nenner unendlich wachsen muſs, also niemals für abgeschlossen (fixirt) angesehen oder in Beziehung auf endliche Gröſsen verhältniſsgebend gemacht werden kann, welches doch der eigentliche Zweck der Differenzial-Rechnung ist.

§. 3.

Es wäre kaum nöthig, jetzt noch auf die Frage zu antworten, wie denn Leibnitz das Unendliche definirt habe; man vermisse diese Definition. Indessen um der Meinung nicht Raum zu geben, als fänden hier nun erhebliche Einwürfe Statt: so mag die einzige Bemerkung hergesetzt werden, daſs eine besondere Definition des Unendlichen ganz unnöthig war; weil schon in dem Ausdruck selbst seine Definition liegt. Denn etwas Unendliches ist schlechthin der Gegensatz vom Endlichen. Eine andere Definition, als eine richtige Deutung des an sich verständlichen Ausdrucks, würde nur Unbestimmtheit und wohl gar Widersprüche mit sich führen. So hat unter andern Kästner versucht, in seinen Anfangsgründen der höheren Analysis §. 4. eine Definition vom Unendlichen zu geben, welche recht deutlich und faſslich seyn soll, aber nichts weniger als

das ist, und von demjenigen Manne schwerlich gut geheissen worden seyn würde, von welchem er in der Vorrede zur ersten Auflage sagt, daſs bei ihm sich der Witz des Dichters, die Einsicht des Philosophen, die Gründlichkeit des Geometers und die Belesenheit des Polyhistors vereinigten. Es heiſst a. a. O. also: „Eigentlich kann man nicht sagen, eine Gröſse ist unendlich groſs; denn „jede Gröſse, die ist, läſst sich angeben. Wenn man aber diesen Ausdruck „braucht, so stellt man sich gleichsam eine Gränze vor, der sich die Gröſse „durch beständige Vermehrung immer mehr nähert, und nimmt diese Gränze, „statt der Gröſse in einem Zustande, den man für ihren letzten ansieht, ob„gleich es wiederum keinen solchen letzten giebt." In dieser Umschreibung wird gefodert, sich die eigentlich unendliche oder ohne Ende wachsende Gröſse als eine begränzte, und ihre Gränze in einem letzten Zustande vorzustellen, wiewohl ein solcher nicht gedacht werden könne. Ist das nicht offenbarer Widerspruch? — — Eine um nichts besser gerathene Definition des Unendlichen giebt Herr Carnot in seinen Reflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitesimal, à Paris chez Duprat an V (1797), einer Schrift, welcher Herr S. F. Lacroix, in der Vorrede zu seinem Traité du Calcul differentiel etc. à Paris an V einen groſsen Werth beilegt. Es heist dort S. 26.: „Ainsi on peut dire en „general qu'une grandeur infiniment petite n'est autre chose qu'une quantité „dont la limite est o, et qu'au contraire une quantité infiniment grande n'est „autre chose, qu'une quantité dont la limite est $\frac{1}{0}$". Was heiſst hier: Null und Unendlich sind die Gränzen des Unendlich-Kleinen und Unendlich-Groſsen? Etwa soviel, als jenes darf die erstere und dieses die letztere Gränze nicht überschreiten? Da würde das Unendlich-Kleine niemals = o und das Unendlich-Groſse niemals = ∞ werden können. Dieſs ist klarer Widerspruch. Oder soll jene Definition soviel sagen: das Unendlich-Kleine hat das Null und das Unendlich-Groſse das Unendliche zu seinem nächsten Gränznachbar, so daſs jenem wie diesem nur noch ein einziger Schritt zu thun übrig bleibt, um dort Null und hier Unendlich zu werden? — — Bei dieser Deutung läſst sich zweierlei fragen, fürs Erste, ob nicht auch endliche Gröſsen durch einen einzigen Schritt, z. B. durch eine einzige Subtraction = o werden können? und fürs Zweite, wo denn die Gränze abgesteckt sey, hinter welcher das Unendliche unmittelbar anfange? Man sieht leicht, daſs diese letztere Frage auf eine ähn-

liche Reihe führe, wie diejenige, von welcher bereits im §. 2. die Rede gewesen ist. Es kann also diese neuere Definition keinesweges für bestimmter und passender anerkannt werden, als die sehr bekannte der ältern Mathematiker: „infinite magnum est omni dabili majus; infinite parvum omni dabili minus." Denn so gewaltig sie auch bei den Worten „omni dabili" ausholt, und sich das Ansehen giebt, als solle dergestalt alles erschöpft seyn, daſs gar keine Veranlassung zu einem Einwande mehr übrig bleibt: so ist sie dennoch schwankend und unbestimmt. Man werfe nur die einzige Frage auf, was hier unter dem Ausdrucke „dabile" (quod dari potest) zu verstehen sey. Will man damit gemessene Gröſsen bezeichnen, die als solche nicht unendlich groſs oder klein seyn können: woraus geht denn die Nothwendigkeit gleich hervor, daſs jedes gröſsere oder kleinere Nichtgemessene schon unendlich groſs oder unendlich klein seyn müsse? Soll es meſsbare Gröſsen bedeuten, so ist ja vieles Nichtmeſsbare, z. B. die für uns unermeſslichen Abstände vieler Himmelskörper, gewisse Geschwindigkeiten, oder kleine Zwischenräume, Gewichtstheile, Zeitintervalle u. dgl. unläugbar theils gröſser theils kleiner, als das dabile in dieser Bedeutung; aber darum noch keinesweges unendlich groſs oder unendlich klein. Oder soll dabile so viel heiſsen, als eine willkührlich vorzuschreibende Gröſse? Dann würde, wegen des Beisatzes omne, jede mögliche oder denkbare Gröſse, also ∞ oder $\frac{1}{\infty}$ selbst, so wie ∞^{∞} und $\left(\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ vorgeschrieben werden können, und eben darum ein Widerspruch in der Definition unvermeidlich seyn.

Aus diesem allen geht hervor, daſs es am besten sey, statt aller anderweitigen Definitionen bloſs die in dem Ausdruck Unendlich selbst liegende Bedeutung festzuhalten, und bei dieser in mathematischer Hinsicht an etwas zu denken, was unbegränzt ist.

§. 4.

Die Metaphysik wird allerdings noch einen Unterschied machen müssen, zwischen einer unendlich wachsenden Gröſse und dem Unendlichen selbst. Denn dies letztere ist ein Ideal, welches von einer bloſs unendlich wachsenden Gröſse niemals erreicht werden kann, so daſs eben darum diese letztere vom Anfange ihres Wachsthums an, nicht anders als eine endliche Gröſse zu betrach-

ten ist, jedoch als eine solche, deren Zu- oder Abnahme niemals unterbrochen werden soll. Es folgt hieraus wieder, daſs der Mathematiker nie sagen kann, hier ist eine unendliche Gröſse im eigentlichen Sinn; denn alle Gröſsen, mit welchen wir im begränzten Raum und in der begränzten Zeit zu thun haben, können als abgelösete Gröſsen für sich, oder als Nenner von Brüchen, bloſs unendlich wachsen, um unendlich zu werden.

Aber nun entsteht die schwierige Frage: welche Bedeutung soll man dem Zeichen ∞ geben, die des unendlichen Wachsthums, oder des Ideals vom unerreichbaren Unendlichen selbst? —— Wenn ein spitzer Winkel φ nach und nach ein rechter wird, so kommt eine Gleichung für $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{0} = \infty$, wo diese aus dem zunächst eingeschränkten Raum hinausgehende grade Linie nicht anders, als unbegränzt wachsend gedacht werden, und um so weniger mit dem Ideal des Unendlichen einerlei seyn kann, da sie einen Anfangspunct, also irgendwo eine bestimmte Gränze hat. Gleichwohl ist verstattet, sie $= 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ in infinitum zu setzen, und $\cos R$ durch $\frac{1}{\infty} = 0$ auszudrücken. Da giebt aber die Division $1 : (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ in infin.) den sonderbaren Quotienten $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots$ der sich in einem unaufhörlichen Wechsel zerstört und wieder herstellt, wo man also nimmermehr auf einen Werth $= 0$ kommen kann, es sey denn, daſs für den Quotienten eine endliche und grade Zahl von Gliedern festgesetzt werde. Das ist jedoch höchst willkührlich, und man hat keinen andern gesetzlichen Grund solches zu thun, als das Bedürfniſs einer trigonometrisch-analytischen Form $\frac{1}{\infty} = 0$. Noch sonderbarer ist die algorithmische Erscheinung, daſs $\frac{1}{1+1}$ in einen Quotienten aufgelöset, ganz dasselbe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots$ in infin. hervorbringt, obgleich $\frac{1}{1+1}$ an sich $= \frac{1}{2}$ ist. Mit der Lösung dieses letzteren Räthsels beschäftigte sich schon Leibnitz (Op. omn. T. III. pag. 406.) und erklärte sich folgendermaſsen darüber: so lange die Reihe endlich bleibt und paarige Glieder hat, wird sie $= 0$, bei unpaarigen $= 1$. Nimmt man sie aber als unendlich groſs an, so ist das Paar oder Unpaar nicht mehr anzugeben (inassignabilis) und jetzt hört auch der Grund auf, warum sie entweder $= 0$ oder $= 1$ seyn muſs. Das Recht des Paar oder Unpaar läſst sich nicht mehr entscheiden (confunduntur),

folglich mufs $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ hervorgehen (das o als eigentlichen Quotienten und $\frac{1}{2}$ als Rest betrachtet). Ohne die Standfestigkeit dieser Schlüsse anzufechten, läfst sich doch nicht läugnen, dafs die Gültigkeit des obigen Ausdrucks $\frac{1}{1+1+1\ldots\ldots} = 0$, rein algorithmisch nur durch die Gleichung für den Cosinus eines rechten Winkels, oder vielmehr für die Tangente desselben, erwiesen werden könne, wobei $\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1}$ gesetzt werden mufs, welches in der That $1+1+1+1+\ldots\ldots$ in infin. also umgekehrt $\cos R = \frac{1}{1+1+1+\ldots\ldots \text{in inf.}} = 1-1$ giebt. Hieraus geht zugleich der Satz hervor, dafs Eins dividirt durch etwas Unendliches gleich Null sey. Er ist bekanntlich ein Lehrsatz der gemeinen Infinitesimalrechnung, und sie verdankt ihn lediglich einer trigonometrischen Formel, also der Analyse eines besonderen Rechnungsfalles: daher auch seine Allgemeingültigkeit, wie die Beantwortung der Frage, welche Bedeutung hier das Zeichen ∞ haben müsse, dahin gestellt bleibt.

§. 5.

Es ist jetzt näher zu untersuchen, ob und welche Beziehung theils der zweideutige Begriff des Unendlichen, theils der gemeine Infinitesimal-Kalkul zur Differenzial-Rechnung habe. Um dies auf die kürzeste Weise zu thun, ist es nöthig, die gesammten Lehrsätze jenes Kalkuls zusammen zu stellen, und seine Methode mit der Methode der Differenzial-Rechnung zu vergleichen. Der Lehrsätze sind hier nicht mehr, als folgende sechs:

1. Eine endliche Gröfse durch Null dividirt, giebt etwas Unendliches.
2. Eine endliche Gröfse durch etwas Unendliches dividirt, giebt Null.
3. Das Unendliche kann durch etwas Endliches weder vermehrt noch vermindert werden.
4. Das Unendlich-Kleine verschwindet vor dem Endlichen.
5. Die niedrigere Potenz des Unendlichen verschwindet vor der höheren.
6. Jeder in einer höhern Potenz befindliche unendlich kleine Bruch, verschwindet vor einem in einer niedrigern Potenz vorhandenen.

Was den ersten Satz betrifft, so ist er zwar algebraisch richtig; aber es geht aus ihm eine zweideutige, zum Theil widersinnige Folgerung hervor, näm-

lich $1 = 0 \cdot \infty$. Da der Factor Null kein anderes Product als Null giebt, so müfste man hier schliessen: Eins oder jede endliche Gröfse als Einheit betrachtet ist $= 0$, welches einen Widerspruch enthält. Wie will man diesen vermeiden? Etwa durch die Auslegung des obigen Ausdrucks: das Endliche sey nichts Unendliches? — —

Dafs der zweite Satz keines allgemeinen und ungezwungenen Beweises fähig sey, ist schon im vorhergehenden Paragraph gezeigt worden.

Soll der dritte Satz nicht einen Widerspruch enthalten, so kann Unendlich hier nicht etwas unaufhörlich Wachsendes bedeuten; weil dieses wirklich eine beständige Vermehrung durch etwas Endliches voraussetzt. Uebrigens läfst er sich wohl auf eine algebraische Weise rechtfertigen, wenn in folgendem Ausdruck $\frac{1}{1-1} \pm v = \frac{1 \pm v \mp v}{1-1} = \infty$, unter Unendlich wieder nicht etwas ohne Ende Wachsendes verstanden wird.

Um den vierten Satz algorithmisch zu beweisen, mufs $a : \frac{1}{\infty} = a : 0$ gesetzt, und hieraus $a - \frac{1}{\infty} = a - 0$ etc. gefolgert werden, wenn man annehmen darf, dafs $\frac{1}{\infty} = 0$ allgemein wahr ist.

Der fünfte Satz scheint sehr leicht aus $\infty^n : \infty = \frac{\infty^n}{\infty^2} : \frac{\infty}{\infty^2} = \infty^{n-2} : 0$ abgeleitet werden zu können, so lange nicht die Potenzirung des Unendlichen zur Sprache kommt. Ohne sich hier an manche paradoxe Behauptungen zu kehren, z. B. dafs das Unendliche höchstens bis zur dritten Potenz erhoben werden dürfe, und eben darum eine unendliche Kugel (!!) $= \frac{4}{3} \pi \infty^3$ das absolute Maximum alles Unendlichen und jeder denkbaren Gröfse sey *), kann man doch nicht einer Frage von gröfserm Belang ausweichen, mit welcher die combinatorische Analytik hervortritt. Es läfst sich nämlich jederzeit $\infty = a + b + c + d + e + \ldots\ldots$ in infinitum setzen, in dieser Gestalt potenziren, und hernach jedes besondere Glied, so wie jeder besondere Coefficient in die Menge von Einheiten auflösen, die er enthält. Auf diesem Wege gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

---

*) Theorie des Unendl. von Joh. Schultz etc. S. 320 u. 368.

1.) $\infty^{1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ in infinitum.

2.) $\infty^{2} = a^{2} + b^{2} + c^{2} + d^{2} + \ldots\ldots + 2\,(ab + ac + ad + ae + \ldots\ldots + bc + bd$
$+ be + \ldots\ldots + cd + ce + cf + \ldots\ldots + de + df + \ldots\ldots$ in infinitum)
$= 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ in infinitum.

Eben so wird jede höhere Potenz nichts anders, als $1+1+1+1+\ldots\ldots$ ins Unendliche. Steigt man abwärts, so kann $\sqrt{\infty}$ nichts anders, als etwas Unendliches seyn. Denn wäre es etwas Endliches, so würde durch die aufsteigende Potenzirung nur eine endliche Gröſse, ein endliches $1 + 1 + 1 +$ u. s. w. erhalten werden. Aus eben dem Grunde muſs auch jede andere Bruchpotenz $\infty^{\frac{1}{3}}$ etwas Unendliches, also ganz allgemein $\infty^{\frac{1}{n}}$ wie $\infty^{n} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ ins Unendliche seyn. Hieraus geht nun der merkwürdige Satz hervor:

> Das Potenziren des Unendlichen im eigentlichen Sinn, auf- und abwärts, hat nichts anderes zu bedeuten, als das Potenziren der Einheit.

Wie dieses eine Extrem der Zahl auf jeder möglichen Potenz in Ewigkeit $= 1$ bleibt, so kann aus dem andern, durch keine Behaftung mit irgend einem Exponenten ausser Null, etwas anderes hervorgehen, als ein und dasselbe Unendliche. Wie sehr auch der Begriff der Multiplication sich hiegegen zu sträuben scheint, so macht doch das Unendliche im eigentlichen Sinn von dieser algorithmischen Veränderungs-Form eine ganz nothwendige Ausnahme. Denn es soll keiner Vergröſserung, und eben darum auch keiner wirklichen Vervielfältigung mehr fähig seyn. Keine noch so schnell und noch so lange wachsende Gröſse darf gedacht werden, die es irgend einmal erreichen könnte; weil das immer auf irgend eine Art von Meſsbarkeit, also auf Begränzung zurückführen und den Begriff selbst zernichten würde. Aus diesem Grunde ist die Vorstellung eines unendlichen Quadrats, einer unendlichen Kreisfläche, eines unendlichen Würfels, einer unendlichen Kugel u. s. w. etwas völlig Sinnloses; denn sie setzt Figur und Schranken hin, wo keine Gestalt und Begränzung Statt findet.

Was ist nun, muſs man fragen, das Multipliciren und Dividiren des Unendlichen durch etwas Unendliches? Bleibt hiebei noch wohl eine andere algorithmische Veränderung möglich, als ein Spiel mit Exponenten der Potenz? — —

In der That, auf diesem allein beruhet der oben aufgestellte fünfte Satz, und keinesweges auf einem Ueberzeugungsgrunde, welcher aus dem Begriffe des Unendlichen im strengsten Sinn hergenommen werden könnte. Daher steht er auch nicht so sicher, wie es auf den ersten Anblick scheint; denn $\infty^n : \infty$ giebt, zufolge des Vorhergehenden, kein anderes Verhältniſs, als $1^n : 1 = 1 : 1$. Etwas Anders ist es jedoch, wenn man dem Zeichen ∞ den Namen des Unendlichen leihet, aber in Gedanken eine endliche Gröſse zurückbehält, welche in Vergleichung mit der Einheit ungeheuer groſs ist, sich wirklich potenziren läſst, und in Beziehung auf jede auch nur um 1 niedrigere Potenz ein Verhältniſs giebt, welches dem Verhältnisse $\infty : \frac{1}{\infty}$ oder $1 : \frac{1}{\infty} = 1 : 0$, ohne einen erheblichen Rechnungsfehler gleich gesetzt werden darf. Bloſs ein Unendliches von dieser Art, das heiſst ein sogenanntes Unendliche (die Redensart, wie Leibnitz es bezeichnete) kann im gemeinen Infinitesimal-Kalkul die bekannten Dienste leisten.

Die nämliche Bewandniſs hat es mit dem sechsten Satze, welchen zu beweisen man schlieſst $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^n} = 1 : \frac{1}{\infty^{n-1}} = 1 : 0$. Eine Folgerung, welche unter der Voraussetzung eingeräumt werden darf, wenn ∞ wieder das sogenannte oder vorgespiegelte Unendliche ist.

§. 6.

Es würde sehr überflüssig seyn, die innere Beschaffenheit des gemeinen Infinitesimal-Kalkuls noch weiter zu untersuchen. Was hier geschehen ist, das genügt hinreichend, sich davon zu überzeugen, daſs die leibnitzische Differenzen-Rechnung ihm eben so wenig ihren Ursprung verdankt, als daſs sie ihre Grundbegriffe von ihm entlehnt hat. Dies wird weiter unten, bei der eigentlichen Darstellung dieser analytischen Methode in das hellste Licht gesetzt werden. Daſs der Begriff des Unendlichen und die gemeine Infinitesimal-Rechnung dem Differenzial-Kalkul nicht zum Grunde liege, läſst sich auf mehr als eine Art einsehen.

1. Der Erfinder des letztern hat sich durch seine oben angeführten sehr scharfsinnigen Aeusserungen, so entschieden gegen den Gebrauch des Unendlichen im höhern Kalkul erkläret, daſs man schlechterdings nicht voraussetzen

darf, die Differenzial-Rechnung gehe von dem Begriffe des Unendlich-Kleinen und Grofsen aus, und sey der gemeinen Infinitesimal-Rechnung ähnlich, ohne zugleich zu behaupten, Leibnitz habe sich und Andere geflissentlich täuschen wollen. Allerdings ist sein mathematischer Nachlafs nicht sogleich verständlich *); aber man lese ihn nur unter der einzigen Voraussetzung, dafs ein philosophisch geordneter und scharfsinniger Kopf in seinen Aeusserungen consequent bleiben und keine Widersprüche hineinbringen mufs: so wird sich der Schlüssel zum Verständnisse desselben bald finden, und die Ueberzeugung gewähren, dafs die frühesten Aufsätze, welche das Wesen des Differenzial-Kalkuls angehen, mit den spätesten über diesen Gegenstand im vollkommensten Einklange sind. Es ist folglich das, was Leibnitz dreissig Jahre nach der Erfindung des Differenzial-Kalkuls behauptete **), keinesweges als eine veränderte Ansicht der Sache zu betrachten. Wenn er also im Jahre 1706 die Differenzial-Rechnung für unabhängig von der Betrachtung des Unendlichen überhaupt, und des Unendlich-Kleinen insonderheit erklärte: so mufste sie dies bei ihrem ersten Entstehen schon gewesen seyn.

2. Man mag an dem Begriff des Mathematisch-Unendlichen auch noch so viel künsteln, er bleibt immer schwankend und zweideutig. Das wird am sichtbarsten bei dem Inhalt der gemeinen Infinitesimal-Rechnung §. 5. Ihre beiden ersten Sätze behalten einen Sinn, es mag unter Unendlich eine blofs unbeschränkt wachsende, das heifst mit den Schranken der Zeit immer noch an Schranken des Raums gebundene Gröfse, oder ein idealisirtes Unendlich verstanden werden, welches durch keine unaufhörlich wachsende Gröfse jemals erreicht werden kann. Der dritte Satz ist offenbar falsch, wenn man das Unendliche in der ersten Bedeutung nimmt; aber nur sie darf Statt finden, wenn nicht der vierte, fünfte und sechste Satz fallen soll. Es ist leicht zu begreifen, dafs ein überlegender Verstand, eine Wissenschaft, wie die Differenzial- und Inte-

*) Ueber die Unverständlichkeit desselben klagte Wallis in einem Briefe an Leibnitz gradezu, und bemerkte dabei, dafs Fermat, Robervall, Frenicle, mit der Erklärung ihrer Methoden eben so zurückhaltend gewesen wären. Leibn. Op. omn. T. III. pag. 108.

**) „Eaque omnia jam triginta annorum aetatem habent." Commerc. philos. et math. Leibn. et Bern. T. II. pag. 161.

gral-Rechnung, nicht auf einen so unsichern Begriff gründen wird, wenn sich noch irgend ein anderes und besseres Princip ausfindig machen läfst. Dafs ein solches da sey, soll weiter unten gezeigt werden.

3. Der Mechanismus der gemeinen Rechnung des Unendlichen, weicht von dem Mechanismus des Differenzial-Kalkuls dergestalt ab, dafs es nicht möglich ist, durch jenen weder auf den Begriff und Zweck, noch auf die bestimmte Form eines Differenzials geleitet zu werden. Bei dem letzteren ist es etwas Wesentliches, Abzüge zu machen, und die erhaltenen Differenzen, welche wirkliche und nicht blofs förmliche oder figürliche Unterschiede sind, anstatt der Gröfsen zu gebrauchen, durch deren Abzug von einander sie entstehen. Man rechnet hier also mit stellvertretenden Functionen. Aber die Möglichkeit nachzuweisen, wie dieses Verfahren zu irgend einem richtigen arithmetischen Schlusse führen könne, das liegt so weit ausser dem Gebiet der gemeinen Rechnung des Unendlichen, dafs es keinem blofs von ihr anfangenden Nachdenken jemals gelingen wird. Eben so wenig läfst sich aus dem ganzen Inbegriff ihrer Lehrsätze, irgend ein Differenzial von bestimmter Form ableiten. Wie will man z. B. die Differenziale der Functionen x^n, a^x, $\frac{x}{y}$ oder $\log x$ durch das Hin- und Her-Wenden des Begriffs vom Unendlichen ausmitteln? Es ist eine vergebliche Arbeit, sogar wenn der Hauptmechanismus des Differenzial-Kalkuls, das Abziehen der Functionen von einander, hier verstattet würde, ohne eine weitere Rechenschaft davon zu fodern. Denn sollen überhaupt Abzugsformen Differenziale seyn, so würden hier unter andern auch folgende Differenziale zum Vorschein kommen:

$$\infty - a = \infty,\ \infty^n - \infty = \infty^n,\ \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty},\ a - \frac{1}{\infty} = a \text{ u. dgl.}$$

welche insgesammt zu nichts führen. Eben so leer wird ein jeder ausgehen, der von der gemeinen Rechnung des Unendlichen eine befriedigende Antwort auf die Frage verlangt, worin sich die Nothwendigkeit der Integration gründe, und warum die Differenzen-Rechnung nicht schon beendigt sey, sobald gewisse Gleichungen gefunden worden sind, aus welchen sich die eine oder die andere der unbekannten Gröfsen, mit Hülfe der algebraischen Theorie der Gleichungen herleiten lassen würde. Dafs die Integration grade den wichtigsten Theil des höhern Kalkuls ausmache, und etwas ganz Eigenthümliches in ihrer

Art sey, läſst sich mit aller Mühe durch den bloſsen Begriff des Unendlichen und durch die gemeine Infinitesimal-Rechnung nicht demonstriren. Diese letztere ist also, um bildlich zu reden, für den Urkeim des Differenzial-Kalkuls ein ganz unfruchtbarer Boden. Eben darum ist es ein Irrthum, wenn einige neuere, besonders französische Mathematiker, die Betrachtung des Unendlichen für das Princip der leibnitzischen Analysis angesehen haben. Sie ist weder Hauptprincip noch Nebenprincip derselben. Auch kann der Begriff des Unendlichen mit der gemeinen Infinitesimal-Rechnung zugleich, stehen oder fallen, ohne daſs der Differenzial-Kalkul im mindesten darunter leidet.

Zweiter Abschnitt.

Prüfung der maclaurinschen Darstellung der Fluxions-Rechnung, sofern sie mit dem Differenzial-Kalkul einerlei seyn soll *).

§. 7.

Es würde am unrechten Ort seyn, hier etwas über die Geschichte der Erfindung des Differenzial-Kalkuls, und über den berüchtigten Streit zu sagen, in welchen Leibnitz deshalb mit J. Newton verwickelt wurde **). Genug dieser letztere Gelehrte hat in den ersten Ausgaben seiner Principien der Naturphilosophie selber versichert, daſs der Differenzial-Kalkul der Sache nach mit seiner Fluxionsrechnung einerlei sey, und bloſs in Hinsicht auf Ableitung und Bezeichnungsart der Gröſsen von letzterer abweiche ***). Ueberdem ist es bekannt, daſs der gelehrte Engländer in seiner Schrift von den Quadraturen, welche im Jahr 1704, d. i. 27 Jahre nach der Bekanntmachung des Differenzial-Kalkuls erschien, wie auch in der ersten Ausgabe der Princ. Philos. natural. S. 263, und in den früheren Ausgaben seiner Analysis per quantitatum series fluxiones ac differentiales etc. Fehler gemacht hatte, welche er erst im Jahr 1711 mit Hülfe

---

*) Sir Colin Mac Laurin's Treatise of Fluxions in two books. Edinb. MDCCXLII. 4to.

**) Sehr unbefangen urtheilt hierüber Carl Bossüt, in seiner Geschichte der Math. übers. von Reimer. Hamb. 1804. Th. 2. S. 139 ff.

***) Es heiſst in der Ausg. von 1714 in einem dem 7. Satze des 2. Buchs angehenden Scholium: „Vis clarissimus methodum suam communicavit a mea vix abluentem praeterquam in verborum et notationum formulis, et Idea generationis quantitatum.

der leibnitzischen Methode verbessern konnte. Er betrachtete nämlich die aus der Function $(x+o)^n$ entstehenden Binomialglieder $nx^{n-1}o$, $\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}o^2$ u. s. w. als die erste, zweite ..... Fluxion, welches ein Fehler war, denn schon Joh. Bernoulli rügte *). Späterhin vertauschte Newton die Potenzen des zweiten Binomialtheils o mit den punctirten Buchstaben $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{\ddot{x}}$ etc. und schrieb richtiger $nx^{n-1}\dot{x}$, $n(n-1)x^{n-2}\ddot{x}$ ...... ähnlich den leibnitzischen Ausdrücken $nx^{n-1}\partial x$, $n(n-1)x^{n-2}\partial x^2$ u. s. f. Dazu kommt noch, daſs C. Mac Laurin im 12. Kap. des ersten Buchs, S. 413 seiner oben erwähnten Schrift versichert, die Differenzial-Rechnung stimme mit der newtonschen Fluxions-Methode ganz überein, und (S. 416.) sie könne aus dieser abgeleitet werden. Beide Wissenschaften sind also Eins, und es darf mit Recht gefragt werden, welche Aufklärung sie dieser maclaurinschen Fluxionen-Theorie verdanken. Das günstige Urtheil, welches verschiedene deutsche und französische Mathematiker über ihren Verfasser gefällt haben, würde eine gründliche und gelungene Darstellung erwarten lassen, wenn man nicht fast allgemein über eine zu groſse Weitläuftigkeit klagte. Diese ist schon kein gutes Zeichen; denn zu viele Worte, besonders wenn sie nicht recht geordnet sind, hindern gewöhnlich den Leser, Zeile für Zeile prüfend durchzugehen. Hätten Kästner und Klügel dies gethan, so würden sie gewiſs nicht zu den Lobrednern einer Schrift gehören, die sich allerdings das Ansehen giebt, als herrsche euklidischer Geist in ihr, die aber in den apogogischen Beweisen ihrer Sätze mehrmals gegen die euklidische Strenge verstöſst. Es ist nicht leicht, zu dieser Ueberzeugung zu gelangen; denn es wird eine ungewöhnliche Aufmerksamkeit erfodert, bei der ermüdenden Weitschweifigkeit des Vortrags die logische Beziehung der einzelnen Sätze fest zu halten, und eben dadurch den Schein kennen zu lernen, welcher hier im Gewande der Wahrheit einhertritt.

§. 8.

Die Einleitung zu C. Mac Laurin's Treatise of Fluxions, beschäftigt sich mit der wichtigen Frage: wie kann ein veränderliches Verhältniſs durch ein unveränderliches gemessen werden? Durch diese Frage

*) Commerc. philos. et mathem. Viror. L. et J. B. Tom. II. pag. 295, 309 seqq.

rückte der Verfasser dem Hauptpuncte der Differenzial-Rechnung wirklich so nahe, daſs wenn er unbefangener und etwas tiefer untersucht hätte, er gewiſs zu einer deutlichen Einsicht in das leibnitzische System der Differenzen gelangt seyn würde. Denn um die vorhergehende, den ältern Mathematikern unauflösliche Aufgabe, dreht sich die ganze Differenzial-Rechnung, und von ihrer Lösung hängt die Möglichkeit irgend einer Rechnung mit veränderlichen Gröſsen ab, mag sie auch eine andere Gestalt haben, als die leibnitzische.

Es fehlt aber schon in der Einleitung selbst nicht an Widersprüchen, und ungegründeten Behauptungen. So heiſst es S. IV., der Name Fluxion *) sey passender, als Differenz; und doch sind die Fluxionen durchaus nichts anders, als wahre Differenzen. Eine Eigenschaft, welche sich durch die verschiedene Bezeichnungsart wahrlich nicht verheimlichen läſst. An eben der Stelle hält der Verfasser die Voraussetzung unendlich kleiner Gröſsen für ein gar zu kühnes Postulat in einer Wissenschaft wie die Geometrie, und verlangt, daſs es nachgewiesen werde, warum man einige Theile, die unendlich kleiner sind, als die andern, vernachlässige, oder warum es ein Irrthum sey sie beizubehalten. Aber bald nachher erlaubt er sich selber den Gebrauch unendlich kleiner Gröſsen, und betrachtet sie als Nullen, oder als Dinge, die keine Differenz hervorbringen, ohne im mindesten davon Rechenschaft zu geben. Es heiſst nämlich S. 6: „behalten zwei veränderliche Gröſsen z. B. x und y ein „unveränderliches Verhältniſs zu einander, nähern sich aber zwei bestimmten „Gröſsen, wie a und b zugleich: so kann man das Verhältniſs $a:b = x:y$ „setzen, wenn die letztern von jenen nur noch um etwas Kleineres als irgend „eine angebliche Gröſse (leſs than any assignable measure) verschieden sind.“ Gleich hinterher heiſst es, daſs dieser sehr einfache Satz als ein Fundamentalsatz in der Lehre von der Vergleichung krummliniger Figuren angesehen werden müsse. Mit einer ganz kleinen Abänderung findet man ihn S. 10. wiederholt; denn anstatt des obigen assignable measure ist hier assignable quantity gebraucht, und eben dadurch die Einerleiheit seiner Bedeutung mit der des

*) Bekanntlich hat schon der Lord Napier, Baron of Merchiston in seinem Werk: mirifici canonis logar. descript. 1614, den Ausdruck Fluxion gebraucht, über dessen Bedeutung C. Mac Laurin nie mit sich einig gewesen zu seyn scheint.

Unendlich-Kleinen um so viel gewisser geworden. Hier also wird gut geheissen, was im Anfange gemifsbilligt wurde. Warum? Es kam darauf an, das Unendlich-Kleine in Beziehung auf den Differenzial-Kalkul herabzusetzen, hier aber solches, zum Behuf einer selbst-ersonnenen Messung veränderlicher Verhältnisse, unter einem veränderten Namen beizubehalten. Die maclaurinsche Methode, veränderliche Verhältnisse zu messen, ist übrigens, nach Maafsgabe der gegenwärtigen Einleitung, eine Art von archimedischer Exhaustions-Methode, und soll mit der newtonschen Lehre von den ersten und letzten Verhältnissen übereinstimmen. Immerhin mag das zugegeben werden, wiewohl sich mancherlei auffallende Abweichungen zeigen. Soviel aber folgt hieraus nothwendig, dafs wenn die Fluxions-Rechnung eine Erschöpfungsmethode seyn soll, wie sie denn, um der newtonschen ersten und letzten Verhältnisse willen, ihrem Urbegriffe nach füglich nichts anders seyn kann, ihre Natur (nicht ihr entlehnter Mechanismus) von der Natur des Differenzial-Kalkuls durchaus verschieden seyn mufs. Denn wer diesen letztern als eine archimedische Exhaustions-Methode ansehen will, der ist von dem wahren Verständnisse desselben noch sehr weit entfernt.

§. 9.

In dem eigentlichen Elements of the method of Fluxions, Book I., Chap. I. soll die Fluxions-Methode, nach Art der alten Geometer, streng demonstrirt werden; darum gehen Definitionen voran, dann folgen vier Axiome, funfzehn Theoreme und einige Lemmate. Doch hat man am Ende dieser Entwickelung der allgemeinen Gründe der Fluxions-Rechnung nichts weiter gefunden, als ungenügende Andeutungen, wie veränderliche und unveränderliche Gröfsen wohl mit einander verglichen werden können. In Hinsicht der Definitionen heifst es S. 56 u. 57: „diejenige Gröfse, welche durch Bewegung, oder durch ein „ihr ähnliches Wachsthum erzeugt wird, heifst fliefsend oder ein Fluent; „die Geschwindigkeit aber, mit welcher sie während einer gegebenen Zeit, die „zu ihrer Erzeugung angenommen wird, fliefst, ihre Fluxion. Die letztere „wird eben darum jederzeit gemessen durch die Zunahme oder Abnahme (by the „Increment or Decrement) welche in einer gegebenen Zeit, vermittelst obiger „Bewegung, wenn diese nämlich vom ersten Augenblick an, ohne irgend eine

„Beschleunigung oder Zögerung, gleichförmig fortdauert, zum Vorschein „kommt." — — Hienach verhalten sich Fluent und Fluxion, wie Bewegung und Geschwindigkeit. Es ist leicht zu erachten, daſs da die Bewegung theils gleichförmig, theils gleichförmig beschleunigt oder verzögert, theils ungleichförmig, und hier wiederum bald ungleichförmig beschleunigt bald ungleichförmig verzögert seyn kann, weder die Axiome noch Theoreme, welche die ersten Gründe der Fluxionsrechnung ausmachen, eine solche Einfachheit und Klarheit zulassen, wie sie sich weiter unten bei der Differenzial-Rechnung zeigen wird. Ueberdieſs vermiſst man eine befriedigende Angabe der Ursachen, warum hier ausser den ersten auch noch zweite, dritte und kurz Fluxionen höherer Ordnungen erfoderlich sind. In der Differenzial-Rechnung giebt es Differenzen der ersten, zweiten, dritten und folgenden Differenzen, wovon die Gründe sehr nahe liegen. Grade so sollen auch in der Fluxions-Rechnung, Fluxionen der ersten, zweiten und folgenden Fluxionen Statt finden. Das wäre eine Geschwindigkeit der ersten, zweiten, dritten und folgenden Geschwindigkeiten. Was läſst sich aber bei einer Geschwindigkeit der Geschwindigkeit, oder bei Geschwindigkeiten der Geschwindigkeiten denken? — — Das giebt ja nichts, als entweder Ausdrücke ohne Bedeutung, oder nachgeahmte Formen der Differenzial-Rechnung, wie denn hier die Fluxionen aller Grade nichts anders, als wirkliche Differenziale sind, man mag auch sagen was man will.

Sollte die Fluxionsrechnung eben so klar als fest begründet seyn: so muſste sie, indem sie bei der Vergleichung veränderlicher Gröſsen die Stelle der Fluenten von Fluxionen vertreten läſst, unbedingt nachweisen:

1. daſs die Vergleichung zweier Geschwindigkeiten unfehlbar auf das Verhältniſs oder die Beschaffenheit zweier Bewegungen schlieſsen lasse, so daſs man aus jenen erkennen kann, ob diese gleichförmig oder ungleichförmig, und in welchem Maaſse sie es sind;

2. daſs jede Art der Bewegung, sowohl die gleichförmige als auch die mannichfaltig ungleichförmige, ihrer zugehörigen Geschwindigkeit ein ganz eigenthümliches Merkmal aufdrücke, bei dessen Wahrnehmung man sogleich inne werden muſs, von welcher Art der Bewegung die Geschwindigkeit herrühre.

Angenommen, dafs die Beschaffenheit verschiedenartiger Bewegungen, vermittelst ihrer eigenthümlichen Geschwindigkeit (wenn es eine solche giebt) grade so unfehlbar erkannt werden könnte, wie das Verhalten schwerer Körper vermittelst ihres eigenthümlichen Gewichts: so würde es doch nur Eine Ordnung (Rang) von Fluxionen, die alleinigen ersten nämlich, aber folgende zehn bis eilf Gattungen von Fluenten geben, zu welchen die vorhandenen Arten von Bewegung durchaus berechtigen:

I. den Fluenten des ganz gleichförmigen oder nach dem einfachsten Gesetze erfolgenden Wachsthums (Schwindens) einer veränderlichen Gröfse;

II. den Fluenten des gleichförmig beschleunigten Wachsthums;

III. den Fluenten der gleichförmig verzögerten Veränderung;

IV. den Fluenten der ungleichförmig beschleunigten;

V. den der ungleichförmig verzögerten Zu- oder Abnahme;

VI. den Fluenten einer regelmäfsig wechselnden Zu- und Abnahme, in irgend einer ununterbrochenen Zeit;

VII. den Fluenten der unregelmäfsigen Veränderung, wo eine Gröfse ohne angebliche Regel bald zu- bald abnimmt;

VIII. den Fluenten einer ganz unregelmäfsig beschleunigten;

IX. den einer ganz unregelmäfsig verzögerten Veränderung;

X. den Fluenten einer solchen Gröfse, die einen ganz unregelmäfsigen Wechsel der Zu- und Abnahme in einerlei Zeit unterworfen ist.

XI. Endlich würde noch hieher gehören der Fluent einer solchen Gröfse, welche sich nach Art einer wiederkehrenden Reihe ändert.

Wollte nun C. Mac Laurin einerseits alle hieraus nothwendig entstehenden Fluxionen oder Exponenten veränderlicher Verhältnisse aufzählen, und andererseits die Möglichkeit nachweisen, wie diese Exponenten der Verhältnisse, die er selber noch für veränderlich hielt, gemessen werden können: so mufste er nicht nur von den allgemeinsten Axiomen der Gröfsenlehre ausgehen, sondern auch lichtvollere Gesetze zur Vergleichung und Messung veränderlicher Gröfsen überhaupt mittheilen, als in seiner Theorie der Fluxionen vorhanden sind. Wenn man im Allgemeinen je zwei der obigen Fluenten zu einem Verhältnisse verbindet, um in den entstehenden Fluxionen das Maafs dieser Verhält-

nisse zu erhalten: so sind schon $\frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 55$ Grundformen *) oder allgemeine Typen der ersten Fluxionen erfoderlich, bloſs um alle Fluenten in Gestalt von veränderlichen Gröſsen mit beständigen Exponenten der Potenz, in Verhältnisse zu bringen, und ihre Verhältniſs-Exponenten zu erhalten. Man muſs sich hier hüten, die Grundidee der Fluxionsrechnung, nach dem Mechanismus des Differenzial-Kalkuls zu ermessen, und die Fluxion je zweier der obigen Fluenten mit der Fluxion je zwei anderer für einerlei zu halten. So lange man diese Grundidee der Fluxionsrechnung ohne Rücksicht auf den Differenzial-Kalkul betrachtet, und die Frage, ob beide Rechnungsarten einerlei sind, als ganz unentschieden ansieht, können unmöglich Differenziale und Fluxionen einerlei und gleichzählig seyn. Die letzteren sind veränderliche Exponenten veränderlicher Verhältnisse. So hat sie wenigstens diese maclaurinsche Fluxionen-Theorie in ihrer ersten Bedeutung dargestellt. Hienach ist also Flux. $(x : v)$ ganz etwas anders, als Flux. $(x : y)$ und diese wieder etwas anders, als Flux. $(x : z)$, wenn nicht v, y, x gleichartig wachsende oder abnehmende Gröſsen sind. Hierauf gründet sich die obige Anzahl von 55 Fluxionen, die man algebraische nennen könnte. Eben so viele kommen heraus von den Logarithmen, und doppelt so viele, wenn jeder von den obigen Fluenten der Exponent der Potenz einer beständigen oder unbeständigen Gröſse ist. Berücksichtigt man ferner, daſs jede Art von Fluenten wenigstens in drei trigonometrischen Gestalten, als Bogen, Sinus und Cosinus (von welchen letztern die übrigen trigonometrischen Functionen abhängig sind) erscheinen kann, so lassen sich hier 165 verschiedene Exponenten veränderlicher Verhältnisse aufzählen. Dazu kommen endlich noch alle Verhältnisse zwischen algebraischen und logarithmischen, zwischen diesen und exponentialen Fluenten u. s. w., so daſs ein ohngefährer Ueberschlag aller möglichen ersten Fluxionen eine Anzahl von mehr als tausend giebt. Wo ist aber diese Menge allgemeiner Typen der ersten Vergleichung verschiedener Fluenten? — — wie hat die sie erzeugende Idee eine so geringe Anzahl verstatten können? — — und warum muſsten die Fluxionen zu einem ersten, zweiten, dritten etc. Range gehören? — — Allen diesen Fragen weicht die ge-

*) Mag immerhin diese Zahl nur als beiläufig angesehen werden; ihr Zweck ist, denkenden Lesern Veranlassung zu eigenen Untersuchungen über diesen Gegenstand zu geben.

genwärtige Theorie durch folgenden Kunstgriff aus. Es wird von dem Gesetze der Classification der Fluxionen nach den Bewegungsformen keine Kenntniſs genommen, sondern anstatt der zweierlei Gröſsen Fluent und Fluxion, die sich der Aehnlichkeit wegen, wie die veränderliche Gröſse selbst und ihr Differenzial, schon hinreichend gegenseitig bestimmen sollten, noch eine dritte Art eingeführt, nämlich das positive oder negative Increment, als Maaſs der Fluxion. Die Richtigkeit dieser Sache ist schon durch die obige Definition einer Fluxion verbürgt. Es giebt also in dieser Fluxionen-Theorie drei Termini, von denen der zweite, die Fluxion, bloſs ein vermittelnder, gleichsam ein Ableiter des Meſsbaren von den Fluenten auf das Increment ist. Auf diesem Wege kommen die leibnitzischen Incremente und Differenziale in die maclaurinsche Fluxions-Rechnung, welche sich dabei wenigstens einer eigenthümlichen Redensart bedient: „the Fluxion of the magnitude N shall be mea-„sured by the quantity (Increment or Decrement) Q." Doch ist es merkwürdig, daſs der Ausdruck Fluxion im weitern Verlauf dieser Theorie S. 579 u. ff. mit dem Ausdruck Differenzial wieder gleichbedeutend wird; und noch weit merkwürdiger, daſs die Differenzial-Formeln hier weder durch synthetische noch durch analytische Schlüsse, sondern der Reihe nach aus einer freien Einbildungskraft, als bloſs hypothetische Sätze hervorgehen und einen apogogischen Beweis hinter sich haben. Sonderbar genug, daſs bei dieser Entwickelung allgemeiner Ausdrücke, der synthetische Weg und die directen Beweise fast ganz vernachlässigt worden sind, obgleich Axiome und Theoreme genug dazu vorhanden waren.

§. 10.

Die vier Axiome der maclaurinschen Fluxions-Rechnung lauten so:

I. Wenn zweierlei Bewegungen, eine beschleunigte und eine gleichförmige, in einerlei Zeit vollendet werden: so ist der erstere durchlaufene Raum gröſser, als der letztere.

II. In einerlei Zeit führt die beschleunigte Bewegung einen Körper durch einen kleinern Raum, als die durch dieselbe Beschleunigung hervorgebrachte gleichförmige Endgeschwindigkeit (z. B. $gt^2 < t \,.\, 2gt$).

III. Ein mit verzögerter Bewegung zurückgelegter Weg ist kleiner, als ein anderer, welcher in derselben Zeit würde zurückgelegt worden seyn, wenn

die Bewegung nicht verzögert sondern vom Anfange gleichförmig gewesen wäre.

IV. Ieder vermittelst einer verzögerten Bewegung beschriebene Raum ist grösser, als ein anderer, welcher in eben der Zeit mit der am Ende der Zögerung noch übrig bleibenden Geschwindigkeit gleichförmig durchlaufen werden kann.

Abgesehen von der Unbestimmtheit des Ausdrucks im ersten Axiom, wo einerlei Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung eine nothwendige Bedingung ist, gilt von allen überhaupt die Bemerkung, dass sie keine Axiome im euklidischen Sinne sind. Denn sie erfodern Beweise, und können auch durch eigentliche mathematische Grundsätze bewiesen werden, z. B. durch den ganz allgemeinen: Ungleiches zu Gleichem addirt bringt Ungleiches hervor u. s. w. Das zweite maclaurinsche Axiom setzt sogar Fluxions-Rechnung voraus, um sich einen bestimmten Begriff von Endgeschwindigkeit zu verschaffen. Also wird hier die Fluxions-Rechnung durch Fluxions-Rechnung begründet. Ein offenbarer Zirkel! Aus dieser Mangelhaftigkeit der Axiome lässt sich leicht ein Schluss auf die von ihnen abhängigen Theoreme machen. Es darf hiebei nicht unbemerkt bleiben, dass sie nur die vorläufigen Axiome und Theoreme sind. Denn im weitern Verfolg dieser Darstellung stösst man hin und wieder unvermuthet auf Sätze, welche als Ergänzungs-Axiome und Ergänzungs-Theoreme angesehen werden müssen. Beispiele finden sich im Kap. 8. S. 199 bei den Fluxionen krummer Oberflächen, wie auch S. 597, 598; ferner Kap. 12. S. 413, wo bei der Vergleichung des Differenzial-Kalkuls und der Fluxions-Rechnung behauptet wird, die in jenem vernachlässigten unendlich kleinen Glieder seien einerlei mit demjenigen, was die Fluxionsmethode bei der Beschleunigung und Zögerung einer Bewegung vernachlässige (also wird eingestanden, dass die Fluxions-Rechnung gleichfalls etwas vernachlässigen muss) doch werfe man es hier nicht als etwas Unendlich-Kleines weg, sondern weil sich schliessen lasse, dass es nicht durch Bewegung erzeugt worden sey.

Ausser diesen gelegentlichen Einschiebseln von Hülfs-Sätzen, trifft man auch einige nicht wenig befremdende Abänderungen von Definitionen

an. Zufolge der obigen Erörterung der Beziehung zweier Fluenten auf ihre Fluxion, und dieser auf das Increment oder Decrement, als ihr Maafs, konnte bisher unter dem Ausdruck Fluxion nichts anders verstanden werden, als das veränderliche Verhältnifs der veränderlichen Gröfsen, welches durch die Differenz (den in der Zeiteinheit gewonnenen Zuwachs oder die erlittene Verminderung) gemessen werden mufste. Hiemit stimmt sowohl die erste Definition von einer Fluxion S. 57, als auch die bei allen Propositionen des geometrischen Theils dieser Schrift übliche Redensart: „the Fluxion shall be measured." Aber in dem algebraischen Theile, mit welchem das zweite Buch S. 575 anhebt, wird S. 579 für gut befunden, die Fluxion selbst als das Maafs des Verhältnisses anzusehen, in welchem veränderliche Gröfsen zu- oder abnehmen. Es heifst im §. 701: „By the fluxions of quantities we shall now understand „any measures of their respective rates of increase or decrease, while they „vary (or flow) together." Die Veranlassung zu dieser Abänderung gab die Betrachtung, dafs der newtonsche Begriff einer Fluxion, wie er §. §. 10 und 11 aufgenommen worden sey, sich mehr für geometrische Gröfsen, die doch eigentlich durch Bewegung (z. B. die Körper durch Umdrehung der Curven u. s. w.) entstanden sind, als für abstract betrachtete Gröfsen, oder für algebraische allgemeine Zeichen zu schicken scheine. Aus diesem Grunde habe man im ersten Buch die geometrischen Fluxionen zuerst aufgeführt, und von ihnen geometrische Beweise gegeben, die doch mehr, als die algebraischen Rechnungen (computations) genügten. Denn die Evidenz dieser algebraischen Methode sey in Anspruch genommen worden, und man habe in Betreff der hier gebrauchten Zahlengröfsen, Einwürfe gemacht, als ob sie vielleicht dienen möchten, Mängel in den Principien und Demonstrationen dieser Rechnungsart zu bemänteln. (Gegen die maclaurinsche geometrische Methode könnte man diese Klage führen.) Indessen lasse die Dunkelheit in der Algebra sich eben sowohl, als in der Geometrie verscheuchen. So habe der Gebrauch der negativen Zeichen zuweilen den Verdacht veranlafst, als hätten sie keinen haltbaren Grund. Inzwischen wären die negativen Zeichen blofs von der Lage der Linien gegeneinander abhängig. Unter andern sey $1 + \sqrt{-1}$ und $1 - \sqrt{-1}$ eine eingebildete Gröfse; aber ihre Summe $= 2$. Es müsse sich demnach im Kalkul oft etwas ereignen, wo die eingebildeten Gröfsen auf eine Weise compensirt wer-

den, die nicht immer so leicht in die Augen falle. (Diese eingebildete Compensation, bezieht sich auf die vernachlässigten Theile der Differenzen, und wird auch in der lagrangeschen Theorie der analytischen Functionen vorausgesetzt.) Die Regeln für diese algebraische Fluxions-Rechnung sollen aus §. 99- S. 126 (wo die Rede von Fluxionen grader Linien und rechtwinkeliger Parallelogramme ist) abgeleitet werden. Einige algebraische Gröfsen wachsen, oder nehmen so ab, dafs ihre Differenzen gleich, andere aber so, dafs die letztern ungleich sind. (Das ist ja der reine Differenzial-Kalkul!) Man habe hier keine Veranlassung, die Gröfsen als durch Bewegung entstanden zu betrachten, und ihre Geschwindigkeit zu untersuchen, oder gar auf die newtonschen ersten und letzten Verhältnisse Rücksicht zu nehmen. Zwar könne man sich die Gröfsen als Linien vorstellen; aber es scheine doch auch nicht nöthig zu seyn sich solcher Hülfsmittel zu bedienen, wiewohl die geometrische Behandlung der Gröfsen vieles für sich habe. Denn wenn eine Gröfse A um die Differenz a zu- oder abnehme, so müsse $2A$ die Differenz $2a$ geben, also offenbar in einem gröfsern Maafse als A verändert werden, und zwar in dem Verhältnisse $2 : 1$. Ferner wenn m und n beständig seyn sollen, so müsse $\frac{m}{n}A$ um die Differenz $\frac{m}{n}a$ gröfser oder kleiner werden: folglich in einem soviel gröfsern oder kleinern Maafse, als in dem Verhältnisse $\frac{am}{n} : a$ das erste Glied gröfser oder kleiner ist, als das zweite. Dies scheine sehr leicht begreiflich zu seyn, ohne dafs man seine Zuflucht zu andern Betrachtungen nehme, als zu dem Verhältnisse der Differenzen, um welche die Gröfsen wachsen oder schwinden (d. h. zu dem Grundbegriff der Differenzial-Rechnung.) Um also in diesem algebraischen Theile (der maclaurinschen Schrift) die häufige Wiederholung der Figuren-Formeln (figurative expressions) möglichst zu vermeiden, so wolle man sich bemühen, die oben im §. 11 und §. 15 gegebenen Definitionen und Axiome mit andern zu vertauschen, die eine weit allgemeinere Bedeutung hätten, jedoch mit jenen sich sehr gut vertrügen, da sie durch dieselben am besten erläutert werden könnten, so wie die Lehrsätze der Algebra gewöhnlich durch die Geometrie am besten ins Klare gebracht würden (!!) — —

So schwankend sind hier die ersten Grundbegriffe, Definitionen und Axiome. Auch wird es sich bald zeigen, was für ein sonderbarer Gebrauch sowohl von den Bewegungs- als Differenzen-Axiomen in Hinsicht der apogogischen Beweise gemacht wird.

§. II.

Im Kap. 3, welches von der Quadratur krummliniger Figuren handelt, heifst die Propos. IV. S. 132: wenn die Fluxion der Grundlinie (Abscisse) AD, Fig. 1. durch DG vorgestellt wird, so ist das Parallelogramm $DE \,.\, DG$ (das leibnitzische $y\partial x$) genau das Maafs von der Fluxion der Fläche $ADEF$.

Der weitschweifige Beweis, bei welchem vorausgesetzt wird, dafs x den Flächenraum $DE \,.\, DG = EG$ bezeichne, lautet, wenn er etwas lichtvoller geordnet wird, im Ganzen folgendermafsen:

A. Im Allgemeinen.

Es ist I. $x > BDEC$, aber auch
$x < DGHE$: folglich
II. $x = EG$, und diese Gröfse das Maafs von der Fluxion der Fläche $ADEF$.

B. Besonderer Beweis von I.

1.) Die Fläche APM nimmt unterdessen, dafs der Punct P nach D hin eine gleichförmige Bewegung hat, wegen des Wachsthums ihrer Ordinaten mit beschleunigter Bewegung zu (d. h. in gleichen Zeiten kommen immer gröfsere und gröfsere Incremente zum Vorschein, je länger jede folgende Ordinate wird.)

2.) Denkt man sich die gleichförmige Bewegung wie hervorgebracht durch die ungleichförmige (d h. wie zu einer Beschleunigungs-Höhe gehörig): so mufs der beschriebene Raum $x > BDEC$ seyn; zufolge des zweiten Axioms.

3.) Denkt man sich wieder neben der gleichförmigen Bewegung von P eine beschleunigte (d. h. von gleicher Dauer und anfänglicher Geschwindigkeit): so ist der beschriebene Raum x (als der erstern angehörig) kleiner, wie $DGHE$ (als der letztern angehörig), nach Axiom I.

4.) Folglich ist das Maafs der Fluxion oder x, einmal gröfser als $BDEC$, und das anderemal kleiner als $DGHE$.

C. Besonderer Beweis von II.

Es mufs eben darum $x = EG$ seyn. Wo nicht, so nehme man folgende Gegensätze α und β an:

α.) Es sey $x > EG$ und in demselben Verhältnisse $DR > DE$, so dafs

1.) $x : EG = DR : DE$ ist. Man setze zugleich $x = DRLG$.

2.) Wenn nun LR die Curve in N schneidet, und $DE \# NQ$ ist: so hat man $GR : QR = DG : DQ$.

3.) Aber da sich nach §. 16. die mit gleichförmiger Bewegung beschriebenen Räume (d. h. wenn sie als Linien, Parallelogramme oder Parallelepipeda gedacht werden dürfen) verhalten, wie die Zeiten, während welcher sie entstehen: so müfste QR, nachdem P in D angelangt ist, in derselben Zeit beschrieben werden, in welcher P die Linie DQ durchläuft, und zwar so, dafs QR sich, als Parallelogramm, mit gleichförmiger Bewegung bildet.

4.) Dagegen wird unterdessen, dafs P die Linie DQ durchläuft, die Fläche $DENQ$ mit beschleunigter Bewegung erzeugt. Also ist $DENQ > QR$, nach Axiom I.

5.) Es mufs aber auch, wegen $x = DRLG$ und $x > EG$, in demselben Verhältnisse, in welchem $GR > EG$ ist, $QR > EQ$, und eben darum gröfser als $DENQ$ seyn.

6.) Nach 4 und 5 wäre nun $DENQ > QR$ und zugleich $QR > DENQ$, welches einen Widerspruch enthält.

7.) Da also die Voraussetzung $x > EG$ auf einen Widerspruch führt, so mufs sie falsch seyn: folglich ist x nicht gröfser als EG.

β.) Sollte dagegen $x < EG$ seyn: so mag auch in demselben Verhältnifse $Dr < DE$ und $x : EG = Dr : DE$ angenommen werden.

1.) Wenn im $\#\, DrlG = x$ die verlängerte rl die Curve in n schneidet und $nq \# DE$ ist, so mufs $Gr : qr = DG : Dq$ seyn.

2.) Hieraus folgt, dafs der Raum qr vermittelst derjenigen Bewegung, mit welcher die Fläche wächst, so lange gleichförmig erzeugt wird, bis P in D anlangt, in welcher Zeit P die Linie Dq ebenfalls gleichförmig beschreibt.

3.) Aber während P die Linie qD beschrieb, ehe es nach D kam, wurde der Raum $qnED$ durch eine beschleunigte Bewegung erzeugt.

4.) Dieser Raum $qnED$ nun mufste, zufolge des zweiten Axioms, kleiner seyn, als ein anderer, den die Bewegung, mit welcher die Fläche sich veränderte (flowed) gegeben haben würde, wenn sie gleichförmig fortgedauert hätte, nachdem P in D angelangt war.

5.) Es müfste daher nach 4 der Raum $qr > qnED$ seyn, welches ungereimt ist.

6. Da nun x weder gröfser noch kleiner seyn kann, als das Parallelogramm EG: so ist dieses das Maafs von der Fluxion der Fläche $APMF$.

Dieser Beweis gehört zu den elegantesten im ganzen ersten Buch der maclaurinschen Schrift. Er ist hier in Begleitung seiner Fig. 26. Tab. IV. fast wörtlich, wenigstens ganz treu wiedergegeben, und seine Verflechtung nur deswegen durch Abtheilungen und Unterabtheilungen etwas entfaltet worden, um die Vordersätze, Zwischensätze und Schlufssätze in den Syllogismen von einander zu sondern, und um so leichter auf den Ort zurückweisen zu können, wohin die folgenden Anmerkungen besonders zielen.

1. Anmerkung. Der obige Satz ist, wie jeder leicht sehen mufs, eine blofse hypothetische Voraussetzung, die weder synthetisch noch analytisch mit früheren schon sicher gestellten Lehrsätzen der Fluxions-Theorie in unmittelbaren Zusammenhang gebracht werden kann. Daher mufs der indirecte Beweis lediglich von den (wandelbaren) maclaurinschen Axiomen hergeholt werden. Er konnte natürlich keine andere Gestalt erhalten, als die unter A I. und II. befindliche. Richtig ist unter B 1.) der Vordersatz, dafs durch ein gleichförmiges Wachsthum der Grundlinie AP, ein beschleunigtes der immer breiter werdenden Fläche $APMF$ hervorgebracht wird. Aber bei den Zwischensätzen 2 und 3 mufs man sogleich fragen, mit welchem Recht sie sich zwischen 1 und 4 eindrängen können. In 1 sind zweierlei Bewegungen gleichzeitig, nämlich eine gleichförmige des Puncts P, welche eine andere, die beschleunigte der Fläche $APMF$ hervorbringt. Iene verhält sich daher zu dieser, wie die Ursache zur Wirkung. Nun kommt der Zwischensatz 2. In ihm sind noch dieselben zweierlei Bewegungen, eine gleichförmige und eine beschleunigte. Aber plötzlich und ohne irgend einen angeblichen Grund, hat sich das Verhält-

nifs beider Bewegungen geändert, schon verhält sich die beschleunigte zu der gleichförmigen, wie die Ursache zur Wirkung. Woher dieser plötzliche und unerklärliche Wechsel? —— Auf diese Frage läfst sich nicht antworten, wohl aber auf folgende: Warum denn dieser plötzliche und unerklärliche Wechsel? —— Wenn die gleichförmige Bewegung des Puncts P betrachtet wird, als eine zu irgend einer Fallhöhe oder beschleunigter Bewegung gehörige gleichförmige Endgeschwindigkeit: so mufs sie nach Verlauf der Zeit, in welcher P von B bis D fortrückt, noch eben so lange fortgesetzt, einen gröfsern Raum als $BDEC$ beschreiben. Denn fürs Erste ist ja die nunmehrige gleichförmige Bewegung des Puncts P, als eines Erfolges vorhergegangener Beschleunigung, um so viel gröfser geworden, und fürs Andere ist auch das zweite Axiom da, welchem zufolge jeder mit beschleunigter Bewegung beschriebene Raum $BDEC$ kleiner seyn mufs, als ein anderer x, mit der zu dieser Beschleunigung gehörigen Endgeschwindigkeit beschriebene. Daher also $x > BDEC$. Hierauf tritt auch der Zwischensatz Num. 3. vor. Im ersten Zwischensatze, stand vom Puncte B bis D die beschleunigte Bewegung zur gleichförmigen, in dem Verhältnisse der Ursache zur Wirkung. Ueber den Punct D hinaus, zwischen D und G ändert sich wieder die Scene. Die gleichförmige Bewegung tritt aus der Rolle der Endgeschwindigkeit heraus, und stellt nur noch eine gemeine von der beschleunigten unabhängige gleichförmige Geschwindigkeit vor. Jedoch soll sie in D der beschleunigten gleich seyn. Unter diesen Bedingungen erzeugt nun, während einerlei Zeit, die gleichförmige Bewegung einen Raum x, der kleiner ist, als der mit beschleunigter Bewegung beschriebene $DGHE$. Die Wahrheit hievon verbürgt das erste Axiom. So kommen wir denn, mit Hülfe dieser beiden Zwischensätze, zu dem Schlufs-Satze B 4, dafs $x > BDEC$ und $x < DGHE$ ist.

2. Anmerkung. Das willkührliche Gedankenspiel, welches in dem besondern Beweise von A I. herrscht, und mit der euklidischen Art indirecte Beweise zu führen kaum etwas Aehnliches hat, findet sich auch in dem besondern Beweise von A II. wieder. Zugegeben die Voraussetzungen unter α 1 und 2, so ist doch das Uebrige durchaus nicht strenge folgerecht. Es verhalten sich die gleich hohen Parallelogramme GR und QR, geometrisch betrachtet, wie ihre Grundlinien DG und DQ. Betrachtet man sie phoronomisch, so mufs, nach α 3, QR gleichförmig beschrieben werden; weil der Punct P sich von

D nach Q eben so bewegt. Dagegen hat das Trapezium $DENQ$, nach α 4, bei derselben gleichförmigen Bewegung des Puncts P, ein beschleunigtes Wachsthum. Daher wird hier geschlossen, es ist $DENQ > QR$, und das erste Axiom zum Zeugen gerufen. Aber dieses unbestimmt und schwankend ausgedrückte Axiom (vergl. §. 10.) giebt hier offenbar ein falsches Zeugniſs. Die Behauptung $DENQ > QR$, ist geometrisch betrachtet offenbarer Unsinn; weil der Theil gröſser seyn müſste, als das Ganze. Eben dieser Widerspruch würde sich offenbaren, wenn das erste Axiom den benöthigten Zusatz erhält, daſs die Geschwindigkeiten im Anfange der verschiedenen Bewegungen gleich groſs seyn müssen. Da diese Bedingung hier nicht Statt findet, sondern die gleichförmige Bewegung in demselben Maaſse gröſser ist, als die beschleunigte, in welchem die Höhe DR die Höhe DE übertrifft: so kann gar wohl der durch gleichförmiges Wachsthum erzeugte Raum QR gröſser seyn, als der durch beschleunigtes Wachsthum entstandene $DENQ$. Wäre dies in der maclaurinschen Philosophie berücksichtigt worden, so hätte noch das eben so wichtige als einleuchtende Axiom aufgenommen werden müssen:

> Von zwei Geschwindigkeiten, einer gleichförmigen und einer beschleunigten, können in gleichen Zeiten gleiche Räume beschrieben werden, wenn die erstere im Anfange schon verhältniſsmäſsig gröſser ist, als die letztere. Auch kann der vermittelst jener beschriebene Raum gröſser seyn, als der vermittelst dieser beschriebene, wenn der anfängliche Unterschied der Geschwindigkeiten unverhältniſsmäſsig groſs war.

Bei der Anwendung dieses Axioms hätte die phoronomische Vergleichung der beiden Gröſsen QR und $DENQ$, mit der geometrischen völlig übereinstimmen müſsen, und es wäre kein Satz $DENQ > QR$ zum Vorschein gekommen, der sich hergeben muſste, um einen benöthigten Widerspruch zu erkünsteln. Der Beweis fährt nun unter α 5 so fort: es muſs aber, wegen $x = DRLG$ und $x > EG$, das Parallelogramm QR in demselben Verhältnisse gröſser seyn als das Parallelogramm EQ, in welchem GR das Rectangel EG übertrifft. Folglich ist $QR > DENQ$. Diese letztere Behauptung ist ganz richtig, aber die vorhergehende $DENQ > QR$ grundlos. Daher kann der Schluſs unter α 6 u. 7 durchaus nicht Statt finden, und es entsteht aus der Voraussetzung $x > EG$ kein Widerspruch.

3. Anmerkung. Der ganze Beweis hinkt nun schon, und kann auch nicht einmal auf den Fall für gültig anerkannt werden, daſs an den Schluſsfolgen unter β sich nichts auszusetzen fände. Die aufmerksamere Prüfung begegnet aber auch hier denselben logischen Fehlern, die schon im Vorhergehenden gerügt worden sind. Es ist $x < EG$ und $x : EG = Dr : DE$ angenommen worden. Auch soll nach β 1, $x = DrlG$ seyn, welches $x : qr = DG : Dq$ giebt. Die gleichförmige Bewegung des Puncts P durch qD, erzeugt das Parallelogramm qr so, daſs es gleichförmig wächst, also einen gleichförmig beschriebenen Raum darstellt. Im Gegentheil ist $qnED$ in derselben Zeit, vermittelst einer beschleunigten Bewegung entstanden. Nun sollte man hier schlieſsen, es müsse nothwendig, wegen des Verhältnisses der anfänglichen Geschwindigkeiten $= nq : nq = 1 : 1$, $qr < qnED$ seyn. So will es aber die maclaurinsche Logik nicht; denn dieser ist es hier um einen Widerspruch zu thun, welchen $qr < qnED$ nicht geben würde. Daher muſs die gemeine gleichförmige Bewegung für qr, sich unvermerkt in eine gleichförmige Endgeschwindigkeit des beschleunigten Wachsthums von $qnED$ verwandeln, und gegen die Natur der Sache dann erst anfangen, wenn P in D angelangt ist. Ietzt kann das zweite Axiom den Raum qr für gröſser als $qnED$ erklären. Das ist aber, heiſst es im Beweise, eine Ungereimtheit; und da diese aus der Voraussetzung $x < EG$ entstanden ist, so kann die letztere nur falsch seyn, und es darf daher x weder kleiner noch gröſser als EG angenommen werden, welches das zu Erweisende war. — — Man sieht aber ganz klar ein, daſs die beiden Widersprüche, die auf den entgegengesetzten Voraussetzungen $x > EG$ und $x < EG$ beruhen sollen, bloſs erkünstelt sind. Wenn daher auch der Beweis bis B 4 richtig wäre, so würde doch nur folgen, daſs $x > BDEC$ und $x < DGHE$ sey, und das Maaſs der Fluxion zwischen zwei Gränzen falle, übrigens nicht schärfer bestimmt werden könne. Aber da oben schon gezeigt worden ist, daſs die Zwischensätze B 2 und 3 nichts weiter als leere Gedankenspiele und logische Inconsequenzen sind: so fällt der ganze Beweis übern Haufen, und der Satz, daſs $DE \cdot DG$ das Maaſs der Fluxion der von einer krummen Linie begränzten Fläche $APMF$ sey, ist und bleibt eine unerwiesene Hypothese.

4. Anmerkung. Man mag nun einen Beweis im ersten Buch der maclaurinschen Schrift durchgehen, welchen man will: überall zeigt sich derselbe

höchst willkührliche und logisch unerlaubte Gebrauch der vier Bewegungs-Axiome, welche dienstfertig genug sind, benöthigte Widersprüche zum Behuf der apogogischen Beweise hervorzubringen, wenn nur der Beweisführer die Geschicklichkeit hat, in Hinsicht der gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegung Dreierlei in Acht zu nehmen:

1. beide als gleichzeitig aber von einander unabhängig zu betrachten, in welchem Fall nach Axiom I. ohne Ausnahme die erstere einen kleinern, die letztere einen gröſsern Raum giebt;

2. die gleichförmige Bewegung anzusehen als ein Erzeugniſs der Beschleunigung, also abhängig von einer vorausgegangenen beschleunigten Bewegung, wo die erstere nach Axiom II. ohne Ausnahme einen gröſsern Raum als die letztere in derselben Zeit beschreiben muſs;

3. diese beiden Bewegungen, bei der verzögerten Erzeugung begränzter Räume, wieder in das schickliche Verhältniſs zu setzen, das heiſst, sie entweder als von einander unabhängig und gleichzeitig oder als von einander abhängig und auf einander folgend zu betrachten, wo denn im erstern Fall das Axiom III., im letztern das Axiom IV. den Ausspruch thun kann.

Um diesen willkührlichen Wechsel der gegenseitigen Beziehung einer Bewegung auf die andere zu verstecken, war nichts zweckdienlicher, als die groſse Menge von Hülfslinien in den Figuren, wie denn hier in der abgezeichneten 26sten, ausser der Ordinate PM nicht weniger, als acht solcher Linien zu zählen sind, wo zu gleichem Behuf die Differenzial-Rechnung nur eine einzige nöthig hat, und gleichwohl die Richtigkeit ihres Differenzials $y\partial x$ auf das bündigste darthun kann.

§. 12.

Die Anwendung der maclaurinschen Differenzen-Axiome zeichnet sich nicht vortheilhafter aus. Im Buch 2. Kap. 1., wo §. 702 u. ff. von beständigen und veränderlichen Differenzen geredet worden ist, lautet der erste Satz §. 707 also:

Die Fluxion von A in der ersten Potenz (root A) sey a: so muſs die Fluxion von A-Quadrat $2Aa$ seyn.

B e w e i s.

Man setze die aufeinander folgenden Werthe der Wurzel einmal $A - u$, dann A, ferner $A + u$: so wird der entsprechende Werth der Quadrate seyn $AA - 2Au + uu$; AA und $AA + 2Au + uu$. Demnach kann die Fluxion von AA nicht grösser, als $2Au + uu$, aber auch nicht kleiner, als $2Au - uu$ seyn; weil die veränderliche Grösse um $2Au + uu$ oder um $2Au - uu$ wächst.

Dies vorausgesetzt und eingeräumt, dass die Fluxion von $A = a$ sey, so ist die von $AA = 2Aa$; denn

1.) man denke sich die Fluxion grösser, als $2Aa$, und im Verhältnisse wie $2A + o : 2A$, folglich jene $= 2Aa + oa$; nehme zugleich an, u sey ein Increment von A, kleiner als die Grösse o: so würde die Fluxion von AA seyn müssen $2Au + ou > 2Au + uu$; gegen §. 704, welchem zufolge die Fluxion nicht grösser seyn darf, als $2Au + uu$. Da nun dieses einen Widerspruch enthält, so folgt unter der obigen Voraussetzung Flux. $A = a$, dass die Fluxion von AA nicht grösser seyn kann, als $2Aa$.

2.) Sollte sie kleiner seyn, als $2Aa$, so mag sie im Verhältnisse $2A - o : 2A$ kleiner, also $= 2Aa - oa$ genommen werden. Hieraus folgt, weil $a : u = 2Aa - oa : 2Au - ou$, welches letztere kleiner als $2Au - uu$ (wegen $u < o$) ist, dass wenn man die Fluxion von $A = u$ setzt, die Fluxion von $AA < 2Au - uu$ wird; gegen §. 704. Daher muss, wenn die Fluxion von $A = a$ seyn soll, die Fluxion von $AA = 2Aa$ seyn.

Es mag zugegeben werden, dass im §. 704 erwiesen worden sey, die Fluxion von AA dürfe nicht auf der einen Seite das Maass $2Au + uu$ und auf der andern $2Au - uu$ überschreiten. Denn wenn man in der hier angenommenen Reihe $(A - u)^2 + (A)^2 + (A + u)^2$ jedes vorhergehende Glied vom nachfolgenden abzieht: so kommen die ersten Differenzen $2Au - uu$ und $2Au + uu$ zum Vorschein, mit welchen die ersten Fluxionen (Differenziale) mehrentheils einerlei sind. Aber dessen ungeachtet fällt die Nichtigkeit des Beweises in die Augen, sobald auf das hier ganz vernachlässigte Verhältniss Rücksicht genommen wird, in welchem a mit u stehen kann. Es sind folgende drei Fälle gedenkbar:

I. $a = u$ also auch $a < o$.

1. Die Fluxion von AA darf nicht gröſser, als $2Au + uu$, folglich nicht

$$\text{Flux. } AA = 2Au + ou > 2Au + uu \text{ d. i.}$$

$$2Au + ou > 2Aa + aa \text{ seyn.}$$

2. Im Gegentheil darf sie nicht kleiner, als $2Au - uu$ und eben darum nicht

$$\text{Flux. } AA = 2Au - ou < 2Au - uu \text{ d. i.}$$

$$2Au - ou < 2Aa - aa \text{ werden.}$$

Hieraus folgt nichts weniger, als Flux. $AA = 2Aa$, sondern man kommt zu der Voraussetzung zurück, daſs $2Aa + aa$ und $2Aa - aa$ die Gränzen sind, zwischen welchen sie liegen muſs.

II. $a < u$, folglich um so mehr $a < o$.

1. Flux. $AA = 2Au + oa > 2Au + uu$ giebt hier durch Verwechselung des a mit u den Ausdruck $2Au + uu > 2Aa + aa$ nach welchem $2Aa + aa$ selbst die Fluxion von AA seyn kann, indem es mit der Voraussetzung übereinstimmt.

2. Anstatt Flux. $AA = 2Au - ou < 2Au - uu$ läſst sich hier Folgendes schlieſsen:

$$\begin{array}{c} 2A - u < 2A - a \\ u > a \\ \hline \end{array}$$

wo nun $2Au - uu = 2Aa - aa$ Statt finden wird, sobald man $(2A - u) : (2A - a) = a : u$ annimmt. Es wird also der Satz unter 1 nicht umgestoſsen, weil hier Satz 2 nicht gegen die Voraussetzung streitet.

III. $a > u$.

1. Flux. $AA = 2Au + ou > 2Au + uu$ giebt auch

$$2Aa + aa > 2Au + uu.$$

Aber es kann hieraus bloſs der Schluſs gezogen werden, daſs a nicht gröſser als u seyn müsse, wenn kein Widerspruch mit der Voraussetzung Statt finden soll. Dagegen folgt

2. aus Flux. $AA = 2Au - ou < 2Au - uu$ nicht nothwendig

$$2Aa - aa < 2Au - uu; \text{ weil}$$

$$\begin{array}{c} 2A - a < 2A - u \\ a > u \\ \hline 2Aa - aa = 2Au - uu \end{array}$$

geben kann, wenn $(2A - a) : (2A - u) = u : a$ ist.

Auf diesem Wege läſst sich also durchaus nicht erweisen, daſs Flux. $AA = 2Aa$, sondern höchstens, daſs a nicht gröſser als u seyn müsse, um Flux. AA innerhalb der Gränzen $2Aa + aa$ und $2Aa - aa$ zu behalten. Nun können aber zwischen diese Gränzen unzählig viele Glieder eingeschaltet werden, und es ist gar keine Nothwendigkeit vorhanden, daſs $2Aa$ das einzige seyn müsse. Noch weniger leuchtet es ein, daſs aus den vorhergehenden Gegensätzen der Schluſs gezogen werden könne, es müsse Flux. $AA = 2Aa$ seyn, weil Flux. $A = a$ ist. Denn dazu würde der Satz erfodert werden, daſs

$$A : 2AA = \text{Flux. } A : \text{Flux. } AA$$

sey. Dieser läſst sich aber aus der maclaurinschen Argumentation auf keine Weise herleiten. Hiemit fällt nun der ganze obige Beweis weg, und die gegenwärtige Fluxionstheorie muſs entweder einen bessern aufstellen, oder den unerwiesenen Satz aufgeben.

§. 13.

So ungenügend jede unbefangene Kritik die vorhergehenden maclaurinschen Beweise finden muſs, wenn sie gehörig zergliedert werden, eben so unbefriedigend sind auch alle übrigen, sie mögen sich auf die Bewegungs- oder Differenzen-Axiome gründen. Sehr selten findet sich einmal eine eigentlich analytische Entwickelung einer Fluxion, wie unter andern im §. 708, wo jedoch §. 707. zum Grunde liegt. Die allermeisten Beweise stehen, wie ihre Sätze, von einander unabhängig da, und sind oft, wegen ihrer übel gerathenen apogogischen Form, sehr dürftig. Ein solcher kommt bei der wichtigen Lehre von den Fluxionen der Logarithmen im §. 719 vor, zu welchem der vorhergehende Absatz 718 eine sehr leere Vorbereitung ist. Auch aus vielen andern Stellen z. B. im §. 721, 722, 733, 734, 735, 736 wird man sich vollkommen überzeugen, daſs der Verfasser durch seine eben so wenig synthetische als analytische sondern bloſs hypothetische Methode, keinen Differenzial- und Integral-Kalkul begründet oder nur einmal verständlich gemacht haben würde, wenn nicht schon ein vollendeter Kalkul dieser Art vorhanden gewesen wäre. Denn abgesehen von dem zweiten Buch dieser maclaurinschen Schrift, welches eine bloſse Nachahmung der Differenzial-Rechnung ist, giebt die hier aufgestellte Grundidee der Fluxionsrechnung nicht einmal ein Mittel an die Hand, veränderliche Gröſsen auf die Weise mit einander zu vergleichen, daſs stehende (nicht mehr unbestän-

dige) Verhältnisse zum Vorschein kommen. Es ist nämlich die Meinung, daſs alle veränderlichen Verhältnisse sich auf ein Verhältniſs 1 : 1 zurückbringen, oder durch dieses messen lassen. Eine Vorstellung, welche hier von der newtonschen Methode der ersten und letzten Verhältnisse entlehnt und S. 420 ff. weitläuftig genung auseinander gesetzt worden ist. Was sich dagegen einwenden läſst, wird im nächsten Abschnitt folgen. Der gegenwärtige darf, beim Rückblick auf die vorhergehenden Untersuchungen, mit der Bemerkung schliessen, daſs diese so vielfältig gerühmte maclaurinsche Schrift ein miſslungener Versuch ist, den Differenzial-Kalkul besser zu begründen, als es der Erfinder selbst gleich anfangs gethan hat.

Dritter Abschnitt.

Prüfung der newtonschen Methode der ersten und letzten Verhältnisse (Methodus rationum primarum et ultimarum) als angebliche Grundlage der Fluxions-Rechnung.

§. 14.

Die Methode der ersten und letzten Verhältnisse, welche der Verfasser der mathematischen Principien der Naturphilosophie, im ersten Buch dieser berühmten Schrift, als die vermeinte Grundlage der Fluxions-Rechnung aufbewahrt hat, steht mit dem Vorhergehenden in einer zu nahen Verbindung, und ist wenigstens in mathematisch geschichtlicher Hinsicht zu wichtig, als daſs sie hier mit Stillschweigen übergangen werden könnte. Der ganze Abschnitt, in welchem diese newtonsche Methode auseinander gesetzt wird, enthält eilf Lehnsätze (Lemmata) und einige Zusätze. An der Spitze steht folgende Hypothese:

„Gröſsen und Gröſsen-Verhältnisse, welche während irgend einer endlichen Zeit das beharrliche Bestreben äussern, einander gleich zu werden, und vor Ablauf der Zeit ihrer Gleichheit bereits näher gekommen sind, als daſs noch ein gegebener Unterschied Statt findet, müssen zuletzt ganz gleich seyn (d. h. sich wie 1 : 1 verhalten).“

Der Beweis ist sehr kurz und lautet:

„Wo nicht, so mögen sie zuletzt einander ungleich werden, und den Unterschied D geben; dann würden sie sich aber der Gleichheit nur bis auf den Unterschied D nähern können, welches gegen die Voraussetzung streitet.“

Doch ungeachtet der Kürze und scheinbaren Bündigkeit dieses Beweises, fehlt ihm alle Gültigkeit; weil hier Voraussetzung und zu erweisender Satz Eins ist. Es gehört eben keine grofse syllogistische Fertigkeit dazu, dies letztere sogleich zu entdecken; denn man fasse den Satz nur kürzer, welches er leidet, weil der Zusatz „und vor Ablauf der Zeit etc." wegfallen oder in eine Parenthese eingeschlossen werden kann. In dieser Gestalt lautet er nun also:

„ununterbrochen gleich werdende Gröfsen, müssen nach Verlauf einer endlichen Zeit wirklich gleich geworden seyn."

Kurzer Beweis: „Wo nicht, so mögen sie zuletzt nicht gleich geworden seyn. Dann wäre aber der Satz falsch." In der That, es kann keine andere Schlufsfolge zum Vorschein kommen, und es ist entweder das Lemma unrichtig, oder sein geführter Beweis nicht mathematisch. Hätte der berühmte Verfasser diesen Abschnitt in seinen Principien gegen alle Einwürfe sicher stellen wollen: so mufste die Allgemeingültigkeit seines ersten Lehnsatzes, von welchem alle nachfolgenden abhängig sind, bis zur höchsten Evidenz erwiesen werden. Dies hätte geschehen müfsen durch eine vollständige Darlegung der Unmöglichkeit, dafs annähernde Gröfsen am Ende der ihnen zugemessenen Zeit noch von einander verschieden seyn können. Aber eine solche Darlegung für alle nur gedenkbaren Fälle, war selbst etwas Unmögliches. Denn wie will z. B. die Gleichheit im letzten Augenblick auch da Statt finden, wo die Annäherung langsamer vor sich geht, als der Flufs der zugemessenen Zeit, oder umgekehrt? —— Nur folgende Gegensätze liessen sich nicht abläugnen:

1.) Es ist möglich, dafs zwei sich einander beständig nähernde Gröfsen, am Ende irgend einer Zeit ganz gleich werden können; aber

2.) es ist auch möglich, dafs die Zeit früher abläuft, als jene Gleichheit eintreten kann.

Oder um dem obigen Lemma nicht alle Haltbarkeit zu nehmen, hätte die Bedingung vorausgeschickt werden müssen, dafs der Augenblick der eintretenden Gleichheit das Ende der zu bestimmenden Zeit seyn solle. Angenommen, dafs diese Deutung den in dem Satze liegenden Sinn treffe, und Niemand einwenden könne, er müsse nun eigentlich heissen: „beständig annähernde Gröfsen bedürfen einer gewissen Zeit, um völlig gleich zu werden," so hat zwar das Lemma in so fern gewonnen, aber sein Beweis bleibt ungenügend. Ueberdem

3.) ist es möglich, daſs Gröſsen, die sich eine endliche Zeit hindurch nähern und für einen Augenblick gleich werden, über diesen hinaus wieder in den Zustand der Ungleichheit zurücktreten.

Es giebt unzählige Fälle, wo dieser Wechsel nothwendig ist, sobald verschiedene Gröſsen in verschiedenem Maaſse wachsen oder abnehmen. Wenn z. B. in folgenden Reihen, wo $x = 3y$, und jedes Paar untereinander stehender Glieder gleichzeitig seyn mag,

$$x,\ x + \tfrac{1}{3},\ x + \tfrac{2}{3},\ x + 1,\ x + \tfrac{4}{3},\ x + \tfrac{5}{3},\ x + 2 \ldots.$$
$$y,\ y + \tfrac{2}{3},\ y + \tfrac{4}{3},\ y + 2,\ y + \tfrac{8}{3},\ y + \tfrac{10}{3},\ y + 4 \ldots.$$

die Gröſse $x = 2$ gesetzt wird, so sind beide eine Zeit lang sich nähernden Gröſsen in der fünften Zeiteinheit gleich; aber in den darauf folgenden Zeittheilen gehen sie wieder in den Zustand einer immer mehr zunehmenden Ungleichheit über. Dies findet Statt, man mag die Reihen als steigend oder fallend betrachten. Es würde daher dem newtonschen Lemma keinen Vortheil gewähren, es bloſs auf solche Gröſsen einzuschränken, die beständig kleiner werden, also ein Paar fallende Reihen bilden. Eben so wenig kann es ihm zuträglich seyn, dem dort gebrauchten Ausdruck „constanter (tendunt)" die Bedeutung unaufhörlich beizulegen; denn eine Annäherung, welche ohne Aufhören fortdauern soll, kann niemals den Zustand der Gleichheit, oder des Verhältnisses 1 : 1 erreichen. Es ist also gewiſs der Meinung des berühmten Verfassers gemäſs, den obigen Lehnsatz bloſs auf endliche Zeitabschnitte zu beziehen. Wer sich daher bei mathematischen Betrachtungen nicht gar zu sehr an geometrische Figuren und ihre Schranken bindet, der wird eben so wenig behaupten, daſs alle eine Zeit lang sich nähernden veränderlichen Gröſsen irgend einmal wirklich gleich werden müssen, als daſs sie zuletzt auch in diesem Zustande beharren, und sich eben deshalb messen lassen. Wie viele neben einander laufende Reihen lassen sich machen, die niemals zwei gleich groſse Glieder verstatten; ja wie viele Fälle kommen bei der veränderlichen Bewegung der Körper vor, wo zwar eine anfängliche Annäherung der Geschwindigkeiten Statt findet, aber ein Zustand der Gleichheit auch nicht einmal für einen einzigen Augenblick möglich ist. Eine Allgemeingültigkeit dieses newtonschen Satzes läſst sich also gar nicht erweisen. Eben so wenig giebt er ein Mittel an die Hand, überall veränderliche Gröſsen zu messen; weil das Verhältniſs 1 : 1, wenn es auch zu-

weilen für einzelne Augenblicke erscheint, doch schlechterdings nicht als ein Durchschnitts-Verhältniſs (einer mittlern Proportional-Gröſse ähnlich) angesehen werden darf, welches die Stelle aller übrigen vor und nach ihm vorhandenen Verhältnisse der veränderlichen Gröſse vertreten könnte.

Der zweite newtonsche Lehnsatz heiſst: „Stehen auf *AE* Fig. 2., der Abscisse einer Curve, mehrere Parallelogramme von gleichen Grundlinien *AB*, *BC*, *CD*..... jedoch ungleichen Höhen *Bb*, *Cc*, *Dd*..... und werden von den kleinern Parallelogrammen *aKbl*, *bLcm*, *cMdn*..... ergänzt: so hat unter der Bedingung, daſs man ins Unendliche die Breite der erstern vermindert und ihre Anzahl vermehrt, der eingeschlossene Raum *AKbLcMdD*, so wie der umschlieſsende *AalbmcndoE* in Vergleichung mit der Figur *AabcdE*, das Verhältniſs 1 : 1."

Beweis: „Denn die Differenz der eingeschlossenen und einschlieſsenden gradelinigen Figur, ist die Summe der Parallelogramme *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, folglich einerlei mit dem Parallelogramm *ABla* (weil nämlich jede Grundlinie $DE = dM = cL = bK = AB$ und die Summe aller Höhen $Dd + cM + bL + aK = Aa$ ist.) Da nun die Breite *AB* unaufhörlich vermindert wird: so muſs sie kleiner, als irgend eine gegebene werden. Daher ist, zufolge des ersten Satzes, die Gleichheit der eingeschlossenen mit der einschlieſsenden gradelinigen und der krummlinigen Figur zuletzt unausbleiblich."

Da der erste Satz nicht strenge erwiesen worden ist, aber dem gegenwärtigen zur Stütze dienen soll: so kann der Beweis dieses letztern keinesweges für vollgültig angesehen werden. Ueberdem ist hier der zweideutige Ausdruck „unendlich" gebraucht worden, welcher das Lemma selbst schwankend macht. Indessen wenn man auch hievon wegsieht, so erfüllt es seine Bestimmung doch nicht. Man sieht leicht ein, daſs sein ganzer Zuschnitt auf eine geometrische Raumerschöpfung berechnet ist, vermittelst welcher zwischen drei Figuren ein Verhältniſs 1 : 1 erlangt werden soll. Dazu wird eine unendliche Menge unendlich kleiner Theile der Grundlinie *AE* erfodert. Nun denke man sich $AB = \frac{1}{\infty} = 0$, und eben dadurch das Perpendikel $Bb = Aa$ geworden: so hat zwar der Unterschied der drei eingebildeten Figuren *ABbK*, *ABba* und *ABla* aufgehört. Wenn aber ein folgendes Parallelogramm dieser Art entstehen, und sich unmittelbar an das vorhergehende anschlieſsen soll: so muſs es mit diesem die Seite $Bl = Aa$

gemein haben, deren Endpunct l an oder auf dem Puncte a in der Curve liegt; weil sonst weder das innere Parallelogramm dem äussern, noch auch der von beiden gedeckte Theil der krummlinigen Figur jedem von ihnen gleich seyn könnte. Daraus folgt nothwendig, daſs die Höhe des zweiten unendlich kleinen Parallelogramms auch $= Bl$ seyn muſs. Nun kommt, wegen $Bl = Ff$, der Punct f ebenfalls in die Curve zu liegen: also muſs das dritte unendlich kleine Parallelogramm grade so hoch seyn, wie die beiden vorhergehenden. Um eben der Gründe willen ist man genöthigt, dem unendlich vielsten unendlich kleinen Parallelogramm noch dieselbe Höhe $Aa = h$ zu geben. Dadurch werden dann unendlich viele gleich hohe Parallelogramme aneinander gehäuft. Soll nun die unendliche Menge ihrer Grundlinien die Gröſse $AE = g$ erschöpfen: so ist die Summe aller auf diesem Wege geometrischer Construction erhaltenen Parallelogrammchen, einem Parallelogramm gh, nicht aber der krummlinigen Figur $AabcdE$ gleich. Es geht hieraus hervor daſs diese Raumerschöpfung sich bloſs für Parallelogramme schicke, wo sie inzwischen gar nicht nöthig ist. Der zweideutige Begriff des Unendlichen, der es allenfalls gut heiſst, daſs es mit dem Verhältnisse 1 : 1 zwischen den dreierlei Figuren, die hier in Betrachtung kommen, so genau nicht genommen werde, verstattet allerdings noch die Ausflucht, daſs jedes nach dem ersten folgende unendlich kleine Parallelogramm um einen unendlich kleinen Theil niedriger gedacht wird, als das vorhergehende. Das würde aber unendlich kleine Sprünge oder Lücken im Zusammenhange der erschöpfenden Raumtheile geben. Denn man lasse z. B. Cm unmittelbar an Bb heranrücken: so bleibt zwischen den Puncten b und c eine Lücke $BbcC$ auszufüllen. Soll sie gänzlich verschwinden, so muſs der Punct c mit b zusammenfallen, welches dem Vorhergehenden zufolge nicht zum Ziel führt. Sie kann also nicht gänzlich verschwinden; weil sonst die Abstufung der erschöpfenden Theile wegfällt. Nun aber sind unvermeidlich so viele Lücken da, daſs ihre Anzahl der Anzahl aller Abstufungen gleich, das heiſst unendlich groſs ist. Folglich muſs die Summe der Lücken, der Summe aller ohne Continuität oder vereinzelt liegenden Erschöpfungstheile durchaus gleich seyn: und nun ist grade soviel Mangel, als raumerfüllender Vorrath verhanden. Das heist aber, die krummlinige Figur ist nicht erschöpft, und man darf eben daher nicht den Schluſs machen: es verhalte sich die Summe der unendlich vielen in Gedan-

ken gebildeten Parallelogramme zur Fläche der krummlinigen Figur, wie Eins zu Eins. Weit angemessener würde es gewesen seyn, die letztere in Trapezien zu zerlegen, hierauf aus der Natur der begränzenden Curve zu bestimmen, was für eine Reihe diese immer gröſser werdenden Theile bilden, und endlich die Reihe selbst zu summiren.

Das dritte Lemma ist ein bloſser Zusatz zu dem vorigen, und es wird von demselben Tadel getroffen. Das vierte behauptet die Gleichheit zweier krummliniger Figuren unter der Bedingung, daſs in beide zwei gleiche unendliche Reihen unendlich kleiner Parallelogramme beschrieben werden können. Aber wodurch soll man sich von der Gleichheit solcher Reihen überzeugen? Etwa durch die Gleichheit der Grundlinien und gröſsten Höhen? Wenn auch die letztern gleich sind, so können doch die kleinern Höhen sehr verschieden seyn. Was für einen Ueberzeugungsgrund von der Einerleiheit solcher Reihen giebt es noch, ausser der Einerleiheit der Gleichungen für die begränzenden Curven? Aber sind diese Gleichungen, wie die Parameter, Ordinaten-Winkel und Abscissen dieselben: so wird schon an sich niemand an der Congruenz der Figuren zweifeln. Dagegen läſst sich für keinen andern Fall, mit Beiseitesetzung des mechanischen Messens, aus bloſsen Vernunftgründen über die Frage entscheiden, ob die Reihe der Ordinaten, oder unendlich kleinen Parallelogramme in zwei Figuren, deren Gleichungen noch nicht bekannt sind, dieselbe seyn möge. Denn in zwei verschiedenen Curven, wo die eine die andere durchschneidet, können ein Paar Abscissen mit ihren zugehörigen Ordinaten gleich seyn; aber dessen ungeachtet findet keine Gleichheit der Ordinaten-Reihen Statt. Auf alle diese Fragen hat das vierte Lemma keine Rücksicht genommen: daher ist es sehr unfruchtbar.

Die nächstfolgenden fünf Lehnsätze gehören in die Geometrie, und sind zu Principien einer allgemeinen Rechnung mit veränderlichen Gröſsen gar nicht geeignet. Eben das gilt ven dem zehnten und eilften Lemma, von denen jenes auf die reine Bewegungs-Lehre, dieses auf die Krümmung der Curven Bezug hat. Am Ende des Abschnitts folgen noch einige nähere Bestimmungen über die Bedeutung der letzten Verhältnisse, die von einigen späteren mathematischen Schriftstellern fast bis zum Ueberflusse wiederholt worden sind. Man soll die letzten Verhältnisse nicht in demjenigen Zustande nehmen, wenn abnehmende

Grösen schon verschwunden sind, sondern in dem unmittelbar vorhergehenden. So sey das letzte Verhältnis zweier Geschwindigkeiten dasjenige, mit welchem sie an dem Ort ihres Verschwindens anlangen. Aber es entsteht wieder die Frage, welches ist dieses Verhältnis? — — wie läst es sich auffangen und messen? — — oder aus welchen gegebenen Bedingungen veränderlicher Grössen läst es sich logisch richtig ableiten? — — Gesetzt es wäre möglich, das Verhältnis des vorletzten Augenblicks unter der Menge aller vorübereilenden ganz verschiedenen Verhältnisse zu fassen und fest zu halten: so läst sich aus dem vorliegenden Abschnitte der mathematischen Principien der Naturwissenschaft doch keinesweges einsehen, wie hievon die Messkunde veränderlicher Grösen überhaupt abhänge, oder worin eigentlich die Causalität zwischen dem Verhältnisse 1 : 1 und allen vorhandenen Fluxions-Formeln liege.

§. 15.

Um die Möglichkeit noch näher zu untersuchen, ob das Verhältnis 1 : 1 bei allen veränderlichen Grösen ohne Ausnahme Statt finden, und als allgemeines Verhältnis-Maass gebraucht werden könne, müssen wir uns über die engen Gränzen geometrischer Figuren erheben, und die veränderlichen Grössen unter einer allgemeinen Form betrachten. Was eine veränderliche Gröse nur immer seyn möge, ein geometrisch begränzter Raum, eine bewegende Kraft, eine Geschwindigkeit, ein Widerstand, eine Beschleunigung, eine Zögerung u. s. w., sie läst sich jederzeit als eine Reihe, z. B. als eine arithmetische Reihe vom ersten, zweiten, dritten oder $n$ten Range darstellen. So bilden alle Flächenräume gradeliniger geometrischer Figuren arithmetische Reihen vom ersten, die kubischen Räume der Pyramide, des Kegels, der Halbkugel, solche Reihen vom zweiten, wiederum die Fallhöhen und zugehörigen Geschwindigkeiten bei der gleichförmigen Beschleunigung im freien Mittel, ähnliche Reihen vom ersten Range. Daher kann man die Natur veränderlicher Grösen, in Hinsicht ihrer Verhältnisse und ihrer Messbarkeit bestimmen, wenn man irgend einige ihnen entsprechende Reihen untersucht. So oft diese mit einander verglichen, zwischen einem Paar gleichzeitiger oder einerlei Zahl des Index zugehöriger Glieder das Verhältnis 1 : 1 verstatten: so oft ist die Möglichkeit vorhanden, dass die durch jene bezeichneten Grösen für irgend einen Augenblick gleich werden können.

Wo im Gegentheil das Verhältnifs zweier gleichzeitiger Glieder nicht $= 1 : 1$ werden kann, da mufs auch alle Gleichheit veränderlicher Gröfsen gänzlich wegfallen. Es wird sich nun zeigen, dafs unter den unzähligen Fällen, in welchen veränderliche Gröfsen zu vergleichen sind, äusserst wenige vorkommen, wo man zu dem Verhältnisse $1 : 1$ gelangen kann.

1.) Denkt man sich ein Paar veränderliche Gröfsen so beschaffen, dafs die eine am Anfange einer endlichen Zeit n (des Index der Glieder) $= x$, die andere dagegen am Ende derselben Zeit $= x$, und das Gesetz ihrer Veränderung mit der Form einer arithmetischen Reihe vom ersten Range einerlei ist: so kann unter den kleinstmöglichen mefsbaren Zeittheilen (wie sie die Gröfse zu ihren momentanen Veränderungen erfodert) deren Summe $= n$ ist, einer $= p$ angegeben werden, in welchem beide Gröfsen sich wie $1 : 1$ verhalten. Denn es sey das Increment der einen wie das Decrement der andern $= d$: so hat man die zunehmende im ersten Augenblick $= x - (n - 1)\, d$, die abnehmende $= x$, und nach p Zeiteinheiten ist jene $= x - (n - 1)\, d + (p - 1)\, d$; diese hingegen $= x - (p - 1)\, d$. Beide Ausdrücke zu einer Gleichung verbunden, geben $p = \frac{n+1}{2}$. Wäre z. B. $n = 71$, so käme $p = 36$, das heifst, nach 35 verflossenen Zeiteinheiten werden beide Gröfsen für einen Augenblich gleich. Man sieht aber, dafs n eine ungerade Zahl seyn mufs, wenn p eine ganze Zahl bleiben soll. Daher findet, bei der Vergleichung dieser Art veränderlicher Gröfsen, das Verhältnifs $1 : 1$ keinesweges unbedingt Statt; vielmehr lassen sich nach Maafsgabe der graden und ungraden Zahlen, eben so viele Fälle nachweisen, in denen es ausbleibt, als in denen es eintritt. Ueberdem läfst sich keinesweges beweisen, dafs die Zwischenverhältnisse, welche nicht $1 : 1$ sind, durch das einzige $1 : 1$ mitgemessen werden; denn man kann doch unmöglich $x : x + d - nd = x - d : x + 2d - nd = x - 2d : x + 3d - nd = x - 3d : x + 4d - nd = 1 : 1$ annehmen. Das Verhältnifs $1 : 1$ giebt daher schlechterdings nicht einen Maafsstab an die Hand, vermittelst dessen alle während der ganzen Dauer der Veränderung vorübergehenden Verhältnisse gemessen werden könnten. Es ist eben darum völlig unfruchtbar, ja es fällt bei veränderlichen Gröfsen dieser Art ganz weg, wenn $n = \infty$ gesetzt wird; weil nun das Grade und Ungrade nicht mehr Statt findet, und p gleichfalls unendlich grofs werden mufs.

2.) Werden zwei Grösen x und y mit einander verglichen, von denen die eine sich nach der Form einer arithmetischen Reihe vom ersten Range, die andere dagegen wie eine geometrische Reihe verändert: so geben die jedesmal gleichzeitig vorhandenen Werthe von beiden dort den Ausdruck $x \pm (n-1)\,d$, hier yq^{n-1} oder yq^{1-n}. Angenommen, dass hier in irgend einem Augenblick das Verhältniss 1 : 1 Statt finden könne: so müsste $\frac{x \mp d}{y} = q^{n-1} \mp \frac{dn}{y}$ seyn. Das giebt die Gleichung

$$\frac{x \mp d}{y} = 1 - \text{logn}\, q + n\left(\text{logn}\, q \mp \frac{d}{y}\right) + \frac{(n-1)^2}{1\,.\,2}(\text{logn}\, q)^2 + \frac{(n-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}(\text{logn}\, q)^3$$
$$+ \frac{(n-1)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(\text{logn}\, q)^4 \ldots\ldots\ldots$$

aus welcher sich n bestimmen lassen würde, wenn hier die umgekehrte Methode der Reihen angewandt werden könnte. Dies geht aber darum nicht an, weil, wenn man der vorhergehenden Function von n die Form $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \ldots\ldots$ geben wollte, das erste Glied A in dieser letztern selbst eine unendliche Reihe werden würde, nämlich $A = 1 - \log q + \frac{1}{2}(\log q)^2 - \frac{1}{6}(\log q)^3 + \frac{1}{24}(\log q)^4 - + \ldots.$ nachdem die in der ersten Function vorhandenen Binomien potenzirt, und die nicht mit n behafteten Glieder $= A$ gesetzt worden sind. Hier ist also die Möglichkeit, ob jemals ein Verhältniss 1 : 1 Statt finden könne, ganz unerweislich. Zu eben dieser Ueberzeugung gelangt man durch die willkührliche Annahme der zweiten Gleichung $x \pm (n-1)\,d = yq^{1-n}$. Wie ist es nun anzufangen, muss gefragt werden, für die Fluxions-Rechnung in diesem und ähnlichen Fällen, welche sie doch nicht umgehen kann, das Verhältniss 1 : 1, und für die Vergleichung der veränderlichen x und y eine Fluxions-Formel zu erhalten? — — Man darf mit der grösten Sicherheit behaupten: es ist rein unmöglich.

3.) Nur in demjenigen Fall ist das Verhältniss 1 : 1 für irgend einen Augenblick vorhanden, wenn beide veränderliche Grösen x und y sich zugleich nach dem Gesetze einer geometrischen Reihe verändern. Denn $xq^{n-1} = yp^{n-1}$ giebt

$$n = \frac{\log px - \log qy}{\log p - \log q}.$$

Hier weiss man also, dass für einen einzigen Augenblick die beiden veränderlichen x und y gleich werden. Aber in welchem Verhältniss ihre übrigen ver-

gänglichen Werthe, die gleichzeitig vorhanden sind, stehen mögen, das läſst sich aus dem Verhältnisse 1 : 1 durchaus nicht folgern.

4.) Eben das gilt von zwei veränderlichen Gröſsen x und y, deren gleichzeitige Glieder einerseits eine arithmetische Reihe vom ersten, andererseits vom zweiten Range bilden. Es sey d das Increment von x, und für y das zweite Glied $= y'$, das dritte $= y''$: so läſst sich irgend ein Zeitpunct n annehmen, in welchem

$$x + (n - 1)\, d = \tfrac{1}{2}\,[(y + y'' - 2y')\, n^2 + (8y' - 5y - 5y'')\, n + 6y + 2y'' - 6y']$$

seyn muſs, wenn anders

$$n = -\frac{8y' - 5y - 3y'' - \frac{1}{2}d}{2\,(y + y'' - 2y')} \pm r\Big[\frac{2\,(3y' + x - 3y - y'' - d)}{y + y'' - 2y'} + \Big(\frac{8y' - 5y - 3y'' - \frac{1}{2}d}{2y + 2y'' - 4y'}\Big)^2\Big]$$

nicht eine unmögliche Gröſse wird.

Auf diesem Wege lassen sich alle Arten veränderlicher Gröſsen im Allgemeinen mit einander vergleichen, und Untersuchungen anstellen, ob man dadurch zu einem Verhältnisse 1 : 1 gelangen kann oder nicht. Aus dem Wenigen, was hier in dieser Hinsicht geschehen ist, läſst sich schon die Wahrheit folgender zwei Sätze klar genug einsehen:

I. Einigen Fällen, wo das Verhältniſs 1 : 1 Statt finden kann, stehen unzählig viele gegenüber, in welchen es entweder gradezu unmöglich, oder doch algebraisch unerweislich ist.

II. Das Verhältniſs 1 : 1 ist schlechterdings nicht ein stellvertretendes aller besondern Verhältnisse der gleichnamigen Glieder in zwei verschiedenen Reihen (Fluenten).

Wenden wir diese Sätze zunächst auf die maclaurinschen oder newtonschen Fluenten an, sofern sie nach Maaſsgabe der verschiedenartigen Bewegungen eingetheilt werden müssen: so folgt

α) die Nothwendigkeit, daſs man von jenen Fluenten je zwei combinatorisch mit einander verbinde, um zu wissen, ob die Vergleichung ein Verhältniſs 1 : 1 giebt oder nicht. Denn da jeder von den Fluenten im §. 9. als eine besondere Reihe vom ersten, zweiten, oder dritten etc. Range, und diese wieder entweder als steigend oder fallend betrachtet werden muſs: so ist die Combina-

tion zu Binionen unerlaſslich, wenn man nicht aufs Ungewisse Fluxionen und Formen derselben hypothetisch annehmen will, wie es freilich in der maclaurinschen Theorie überall geschehen ist.

β) Es folgt, wenn anders die Fluxions-Theorie ihre räthselhafte Idee von der Meſsbarkeit veränderlicher Verhältnisse durch das Verhältniſs 1 : 1 gegen alle Einwürfe rechtfertigen kann, daſs für je zwei Fluenten oder Reihen das Verhältniſs 1 : 1 die Fluxion seyn müsse. Wenigstens muſs dies da zugegeben werden, wo die Fluxion selbst das Maaſs eines veränderlichen Verhältnisses ist, wie im ganzen zweiten Buch der maclaurinschen Fluxions-Theorie. Hienach würde, mit Rücksicht auf Num. 1., die Fluxion der beiden Fluenten x und $x-(n-1)d$ oder x und y, nach gehörigem Umtausch des Increments d mit $\dot{x}$ und $\dot{y}$, so wie des p mit $\frac{n+1}{2}$, in folgender Gestalt erscheinen:

$$\text{Flux.}\ \frac{x}{y} = \frac{x-\frac{1}{2}(3n-1)\dot{x}}{y-\frac{1}{2}(n-1)\dot{y}} = 1:1,$$

oder nach der Bezeichnungsart des Differenzial-Kalkuls

$$\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x-\frac{1}{2}(3n-1)\,\partial x}{y-\frac{1}{2}(n-1)\,\partial y}.$$

Was für ein Unterschied geht hieraus hervor zwischen den auf die räthselhafte Fähigkeit des Verhältnisses 1 : 1 gegründeten Fluxions-Formeln, und den aus einer ganz andern Quelle entspringenden Differenzial-Formeln! Sie sind freilich in beiden Rechnungsmethoden gleichlautend geworden; aber es fragt sich: wie war das möglich, da sich hier gar kein Vereinigungs-Punct ausfindig machen läſst? — — —

γ) Es folgt weiter, daſs in der Fluxions-Theorie alle Fluxions-Formeln wegfallen müssen, wo die Vergleichung zweier Fluenten, als zweier verschiedenen Reihen, kein Verhältniſs 1 : 1 verstattet, wie dies der Fall bei $(x+\dot{x})^n$ und $(y+\dot{y})^n$ ist, wenn beide Fluenten x^n und y^n ganz von einander verschieden sind. Solchemnach könnte es auch keine Fluxions-Formel für die beiden Fluenten x und y unter Num. 2. geben, deren ersterer eine arithmetische Reihe vom ersten Range, der andere aber eine geometrische Reihe bildet, also nach Maaſsgabe der Differenzial-Rechnung (Abth. 2. Abschn. 1.) in der Gestalt a^y u. dgl. erscheinen muſs. Aber anstatt in dem Register der Fluxions-Rechnung zu finden:

„The Fluxion $\frac{x}{a^y}$ is wanting"

schreibt sie grade so wie die Differenzial-Rechnung

$$\text{Flux.}\left(\frac{x}{a^y}\right) = \frac{a^y\dot{x} - xa^y\dot{y}\ \text{logn}\ a}{a^{2y}}.$$

Woher nimmt sie denn diese Fluxion, welche ihr durch den Ausfall des Verhältnisses 1 : 1 hier ganz untersagt ist? Hat sie noch eine andere unbekannte Quelle, oder steht sie in diesem Fall mit sich selbst im Widerspruch? — — —

δ) Es folgt ferner, dafs die Fluxions-Rechnung keine Fluxion für eine vereinzelte Function, wie x, x^2, xy u. dgl. geben könnte; weil hier das Verhältnifs 1 : 1 fehlt. Denn um es zu erhalten, mufs eine solche vereinzelte Function mit einer andern Gröfse in Beziehung gesetzt werden. Will sie hier ihre vereinzelten Functionen mit sich selbst in ein Verhältnifs bringen, z. B. $x^2 : x^2$, so ist, wenn es ihr überhaupt nur auf das Verhältnifs 1 : 1 ankömmt, Flux. x^2 : Flux. x^2 eine müfsige Spielerei, da sie ihr 1 : 1 schon in dem $x^2 : x^2$ hat. Hienach würden alle Fluxionen vereinzelter Fluenten ganz unnütze algorithmische Formen seyn. Auf welche Art läfst es sich nun rechtfertigen, dafs die Fluxions-Rechnung, wie die Differenzial-Rechnung ihre $2x\dot{x}$, $x\dot{y} + y\dot{x}$ u. s. w. hat? — — —

ε) Es folgt überdies, dafs die Fluxions-Rechnung so wenig einen einleuchtenden Grund, als einen wesentlichen Nutzen von der Anwendung der Fluxionen zu arithmetischen Proportionen und algebraischen Gleichungen nachweisen kann. Denn fürs Erste sind die Fluxionen unter der Form 1 : 1 keine Stellvertreter der Verhältnisse aller übrigen Glieder in arithmetischen oder geometrischen Reihen (d. h. Fluenten): folglich werden die veränderlichen Gröfsen durch ihre Fluxionen blofs für einen einzigen Augenblick in eine gewisse Relation gebracht, aus welcher sich aber auf die Relation der veränderlichen Grössen für die andern Zeittheile (Index-Zahlen) mit keiner logischen Bestimmtheit schliefsen läfst. Fürs Zweite, es folgt überhaupt gar nichts aus den Fluxionen unter der Form 1 : 1 was auf die algorithmische Veränderung der veränderlichen Gröfsen einen gewissen Einflufs hätte. Denn man mache, wie sich dies mit Differenzialen thun läfst, entweder Fluxions-Proportionen z. B. $v : \text{Flux.}\,(xy) = z : \frac{z}{v}\,\text{Flux.}\,(xy)$ d. i. $v : (1 : 1) = z : \frac{z}{v}\,(1 : 1)$, oder Fluxions-

Gleichungen, z. B. y Flux. (x) = Flux. (z) d. i. $y(1:1) = (1:1)$, so wird keine analytische Kunst vermögend seyn, irgend einen Ausdruck zu Stande zu bringen, welcher einen klaren Begriff geben könnte, einerseits von der algorithmischen Nützlichkeit der Fluxionen in dieser Gestalt, und andererseits von der Nothwendigkeit einer Rechnungs-Operation, welche der Integration ähnlich ist. Es bleibt also, aus diesem Gesichts-Puncte betrachtet, zwischen der Fluxions-Rechnung und dem Differenzial-Kalkul eine so grofse Kluft, dafs es nicht zu begreifen ist, wie beide Methoden jemals haben zu einerlei Mechanismus der Operation gelangen können. Zwar ist es dem Differenzial-Kalkul nicht fremde, seine momentanen Incremente ∂x, ∂y, ∂z etc. als unbestimmte Einheiten zu betrachten; aber in den mehresten Fällen sind diese nur ein combinatorischer Theil des ganzen Differenzials, in Hinsicht dessen es hier nie verstattet ist, dafs es unter der Form 1 : 1 erscheine.

ζ) Es folgt endlich aus diesen Betrachtungen über veränderliche Gröfsen und das Verhältnifs 1 : 1 nothwendig zweierlei: entweder Erstlich, der berühmte Verfasser der mathemat. Princip. der Naturwissenschaft hat blofs dieser Schrift, in welcher von der Fluxions-Rechnung kein Gebrauch gemacht worden ist, den ersten Abschnitt im ersten Buch zum Grunde gelegt, und die Methode der ersten und letzten Verhältnisse steht mit der Fluxions-Rechnung ausser aller Verbindung; oder fürs Zweite, wenn der berühmte Mann selbst irgendwo bestimmt erklärt hat, dafs seine Fluxions-Formeln von dem (unfruchtbaren) Verhältnisse 1 : 1 abstammen: so ist diese Abstammung, vielleicht aus unbekannten Gründen, blofs vorgespiegelt.

Vierter Abschnitt.

Prüfung der Theorie der Gränzverhältnisse als Grundlage der Differenzial-Rechnung.

§. 16.

Mit der Methode der ersten und letzten Verhältnisse ist die Theorie der Gränzen sehr nahe verwandt. Wie dort geht man auch hier darauf aus, veränderliche Verhältnisse zu messen, welches ganz recht ist; weil grade das die Hauptaufgabe der Differenzial-Rechnung ausmacht. Aber beide weichen von dem

eigentlichen Grundbegriffe der Differenzial-Rechnung ab. Indessen ist die Theorie der Gränzverhältnisse mit vielem Beifall gekrönt, und von dem gröfsten Theile deutscher, früherhin auch französischer Mathematiker, als ein genügender Erklärungsgrund der leibnitzischen Differenzen-Methode angesehen worden. Man hat sich auch dieser letztern in so fern genähert, als die veränderlichen Gröfsen in der Gestalt einer Reihe vorgestellt worden sind, aber diese Reihe selbst nicht aus dem rechten Gesichtspuncte betrachtet; weil sie nur gedient hat, das sogenannte Differenzial-Verhältnifs zu bestimmen, auf welches doch in der That nicht so viel ankommt, als auf die Differenziale an sich, indem diese oft ausser aller Verhältnifs-Verbindung gebraucht werden müssen. Uebrigens wird man sich in dieser Theorie vergebens umsehen nach einer genügenden Antwort auf die Frage, weshalb denn eigentlich das Differenzial-Verhältnifs ein so grofses Bedürfnifs für den Kalkul sey. Auch die Definition eines Gränzverhältnisses giebt darüber keinen Aufschlufs. Es heifst: „die Gränze einer veränderlichen Gröfse kann entweder Null oder Unendlich seyn. Die Gränze eines Verhältnisses zweier veränderlicher Gröfsen ist dasjenige (Verhältnifs), welchem sich ihr veränderliches Verhältnifs immer mehr nähert, je gröfser sie genommen werden, oder in einem andern Fall, je kleiner sie sind." *) An eine solche Definition, welche zugleich den Begriff der wesentlichen Beschaffenheit und des algorithmischen Zwecks in sich vereinigen sollte, scheint hier nicht gedacht worden zu seyn. Soviel ist wohl zu vermuthen, dafs das Gränzverhältnifs ein stellvertretendes seyn soll. Aber anstatt die Möglichkeit nachzuweisen, wie die ganze Reihe verschiedener Verhältnisse zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, in einem einzigen aufgefafst, und aus diesem ein Durchschnitts-Verhältnifs oder etwas Aehnliches gemacht werden könne, begnügt man sich mit erläuternden Beispielen, um, wie es scheint, dieser wichtigen Frage durch einen Aufwand von Worten über einzelne besondere Fälle auszuweichen. Denn wenn z. B. $ay - bx = c$ gesetzt, x als unaufhörlich wachsend angenommen, in der Gleichung $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$ das letzte Glied als unendlich klein weggeworfen und nun die Versicherung gegeben wird, es sey $b : a$ das Gränz-Verhältnifs beider veränderlichen Gröfsen: so entsteht natürlich die Frage,

*) Vergl. Klügels mathem. Wörterbuch. Art. Gränze.

welchen Vortheil es denn gewähre, vorausgesetzt, daſs $b:a=y:x$ nicht ein Irrthum sey. Der ist es aber, wenn nicht unterdessen daſs x unaufhörlich grösser wird, y in demselben Maaſse wächst; weil sonst $\frac{b}{a}=0$ folgen würde, welches doch nicht gesucht wird. Wie oft man auch dieses auf die eigentlichen Lehrsätze der Gränzen-Theorie vorbereitende Beispiel von einer andern Seite betrachten mag, es führt immer auf einerlei Resultat, nämlich $y=\frac{b}{a}\infty$, das heiſst $\infty.a=\infty.b$ oder $a=b$.

§. 17.

Um bei der nähern Beleuchtung dieser Theorie der Gränzen eine gewisse Ordnung zu beobachten, würde es nöthig seyn, ihre Erklärungen oder Definitionen vorangehen und hierauf die Lehrsätze folgen zu lassen. Aber jene sind ohne diese nicht verständlich: daher muſs die Untersuchung in umgekehrter Ordnung vor sich gehen.

1) Ein Lehrsatz. „Wenn in der Gleichung $x+a=y$ das x unendlich abnimmt, so ist alsdann a die Gränze, welche man für y gebrauchen kann." *)

Soll nach Verlauf irgend einer endlichen Zeit t die Gröſse x zernichtet, und alsdenn $0+a=y$ seyn: so muſs y unterdessen einen Theil $=x$ verloren haben. Läſst sich nun allgemein erweisen, daſs hiemit die Veränderung von y ihre Endschaft erreicht habe: so kann a für y in Rechnung genommen, oder dies letztere als eine beständige Gröſse behandelt werden. Wenn aber die Veränderung von y, z. B. als abnehmende Geschwindigkeit, Schwere, bewegende Kraft u. dgl. betrachtet, über den Zeitpunct t noch fortdauert: so wird $a>y$, und kann in keinem einzigen der nachfolgenden Zeittheile mehr als Stellvertreter von y gebraucht werden. Nun lassen sich aber unzählige Fälle geben, wo die Veränderung der einen veränderlichen Gröſse mit der Vernichtung der andern nicht aufhört. Es ist also der obige Satz für den höhern Kalkul ganz unfruchtbar.

2) Eine Aufgabe. „Es sey x eine Gröſse, die unendlich wächst, und man nehme $y=a+bx$: die Gränze zu finden, welcher sich y unendlich nähert."

---

*) Vergl. Fischer's Grundriſs der gesammten reinen höhern Mathematik. Leipz. 1807. Bd. 2., S. 177 u. ff.

Auflösung. „Man dividire $a+bx$ durch bx, so kommt $\frac{y}{bx} = 1 + \frac{a}{bx}$. Wenn nun x ohne Ende wächst, so ist 1 die Gränze, welcher sich $\frac{y}{bx}$ ohne Ende nähert.“

Diese Schlufsfolge ist nur für eine endliche Zeit $= t$ wahr, nach deren Verlauf $bx = y$ geworden ist. Ueber diese hinaus wird $\frac{y}{bx} < 1$, und entfernt sich von letzterem, anstatt sich ihm zu nähern. Will man dies vermeiden, so mufs das Wachsthum von y dem von x unaufhörlich voreilen, damit niemals $y < bx$ werde. Nun aber kann $\frac{y}{bx}$ die Gränze 1 niemals erreichen: folglich auch diese niemals im Kalkul für jene veränderliche Gröfse gebraucht werden.

3) Ein zweiter Lehrsatz.

„Wenn $y = ax^h + bx^{h-i} + cx^{h-i-k} + dx^{h-i-k-l} \ldots\ldots$, $y > x$ und h der gröfste Exponent ist: so kann in dem Ausdruck

$$\frac{y}{x^h} = a + \frac{b}{x^i} + \frac{c}{x^{i+k}} + \frac{d}{x^{i+k+l}} \ldots\ldots$$

der erste Theil $\frac{y}{x^h}$ sich dem Werthe a unendlich nähern, wenn x unendlich wächst und alles Uebrige constant bleibt.“

Soll hier die letzte Bedingung auch für y gelten, so mufs in irgend einem Augenblick $x = y$ geworden seyn, und weiterhin immer gröfser werden. Eben darum läfst sich dann durch Umtausch der obige Ausdruck in

$$\frac{1}{y^{h-1}} = a + \frac{b}{y^i} + \frac{c}{y^{k+i}} + \frac{d}{y^{i+k+l}} \ldots\ldots$$

verwandeln, wo der erste Theil der Gleichung, als eigentlicher Bruch, offenbar schon kleiner wie $a \geqq 1$ ist, mögen die nach diesem folgenden Glieder auch seyn was sie wollen. Dies ist nun keine Annäherung, sondern eine Entfernung der Gröfse $\frac{y}{x^h}$ von a, welche desto gröfser wird, je mehr sich x dem Unendlichen nähert. Will man aber auch y wachsen lassen, so mufs es schlechterdings wie x unendlich gröfser werden. Das giebt denn die ganz unnütze Gleichung $\infty = a\infty^h$, in welcher a und $h = 1$ seyn müssen.

4) Der Haupt-Lehrsatz. „Es sey $y = x^n$, so ist $\partial y = \partial(x+\partial x)^n = x^n - x^n + nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}\partial x^3 + \ldots\ldots$ Nun lasse

man ∂x unendlich kleiner werden, so nähert sich das Differenzial-Verhältniſs $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Gröſse nx^{n-1} unendlich. Wird aber $\partial x = 0$, so hat man $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, also das Differenzial-Verhältniſs $\partial y : \partial x = nx^{n-1} : 1$, und das Differenzial $\partial y = nx^{n-1}\partial x$."

Abgesehen davon, daſs die Theorie der Gränz-Verhältnisse keinen Grund angiebt, warum sie nun den ersten Zustand $y = x^n$ von dem zweiten $y + \partial y = (x + \partial x)^n$ zuvor abziehen müsse, um ein Gränz-Verhältniſs finden zu können, da doch an diesen Abzug in den vorhergehenden Lehrsätzen nicht gedacht worden ist: so begeht sie gleichwohl bei dem Gebrauch ihres Factors ∂x Fehler, welche theils die Gesetze des Kalkuls verletzen, theils Widersprüche in diesen letztern bringen. Denn fürs Erste, wenn $\partial x = 0$ gesetzt und ∂y als unveränderlich angesehen wird, so entsteht der Ausdruck $\frac{\partial y}{0} = \infty = nx^{n-1}$, welcher dem Differenzial-Kalkul durchaus fremde ist. Fürs Zweite, verbindet sie den Factor $\partial x = 0$ mit nx^{n-1}, so wird $\partial y = nx^{n-1}\partial x = 0$, und sie erhält hieraus wieder $\frac{0}{0} = nx^{n-1} = 0$, welches ebenfalls ein Ausdruck ist, den die Differenzial-Rechnung nicht verstattet. Um diese beiden, in gleichem Grade unnützen Ausdrücke zu entfernen, müſste die Theorie der Gränz-Verhältnisse unwiderleglich beweisen, daſs einerseits $\frac{\partial y}{0}$ nicht ∞, und andererseits $\frac{0}{0} > 0$ sey. Beides hat sie nicht gethan, und kann es auch nicht thun: daher ist ihr Haupt-Lehrsatz eben so nichtig, als ihr durch denselben mit gar groſser Gemächlichkeit entwickeltes Differenzial.

§. 18.

In Hinsicht der Erklärungen, Anmerkungen u. s. w. aus der Lehre von den Gränz-Verhältnissen wird es genügen, bloſs einige der vorzüglichsten herzusetzen, so wie sie unter andern in Geo. Sim. Klügel's mathematischem Wörterbuch unter der Ueberschrift Differenziale vorkommen.

1. Eine Erklärung (a. a. O. S. 809). „Differenziale sind die Glieder des Verhältnisses der Veränderungen zusammengehöriger Gröſsen, sofern dieses Verhältniſs nicht von der Quantität der Veränderungen, sondern bloſs von den veränderlichen Gröſsen abhängt."

Diese Erklärung wird noch folgendermaſsen erläutert: „Nämlich wenn zwischen zwei Gröſsen x, y irgend eine Relation festgesetzt ist, und diese Gröſsen

sich um Δx und Δy verändern, so bleibt die Relation zwischen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ dieselbe, wie zwischen x und y, und das Verhältniſs $\Delta x : \Delta y$ hängt theils von dieser Relation, theils von der willkührlich zu bestimmenden Quantität der Veränderungen ab. Betrachtet man das Verhältniſs der Veränderungen von x und y bloſs in Rücksicht auf die Bestimmung durch die Relation zwischen diesen Gröſsen, so ist es ein Differenzial-Verhältniſs, und die Glieder desselben heiſsen Differenziale." Um diese etwas unverständliche Erläuterung sich mehr zu verständigen, sind noch folgende Zusätze nöthig. Die Theorie der Gränz-Verhältnisse will:

α. man solle sich die durch ihre Incremente veränderten Gröſsen x und y, noch in dem ersten Verhältnisse $x : y$, also $x : y = x + \Delta x : y + \Delta y$ gedenken. Da aber gesagt wird, die Quantität der Veränderungen oder Incremente lasse sich willkührlich bestimmen: so würde die obige Foderung widersinnig seyn, wenn nicht fortwährend $\Delta y = \Delta x$ genommen werden sollte, in welchem Fall man jederzeit $xy + y\Delta x = xy + y\Delta x$ also eine richtige Gleichung erhält. Allein das endliche $\Delta y = \Delta x$ lasse sich im Kalkul nicht gebrauchen, daher müsse man

β. das Verhältniſs $x + \Delta x : y + \Delta y$ in Gedanken dem Verhältnisse $x + o : y + o$ gleich setzen, jedoch für o und o die Zeichen (Symbole) ∂x und ∂y beibehalten. Dadurch werde das Verhältniſs $x + \partial x : y + \partial y$ nicht von der Gröſse der ∂x und ∂y, sondern bloſs von dem Stammverhältnisse $x : y$ abhängig, und in dieser Gestalt verdiene es den Namen eines Differenzial-Verhältnisses.

γ. Werden dann die ersten Zustände der Gröſsen von den zweiten abgezogen, so behalte man das eigentliche Differenzial-Verhältniſs $\partial x : \partial y$ übrig, dessen Glieder Differenziale genannt werden.

δ. Zwar seyen diese Glieder an sich Nullen oder Nichts; aber man müsse sich doch auch ein Etwas unter ihnen vorstellen, um die Relation $x : y$ daran festhalten zu können. Freilich lasse sich nicht abläugnen, es sey unstatthaft, sich die beiden Nullen so vorzustellen, als wenn das eine mehr Null wäre, wie das andere (a. a. O. S. 813.); indessen gebe es doch (S. 814.) zwischen Etwas und Nichts noch etwas Drittes, nämlich den Begriff verhältniſsmäſsiger Gröſsen.

e. Um also darin keinen Widerspruch zu finden, daſs die Differenziale zugleich Nichts und doch noch Etwas seyn sollen, müsse man bei ihnen von aller Gröſse (Quantität) wegdenken, und bloſs das Verhältniſs im Sinne behalten. — — Vielleicht so, wie jemanden, welcher alles baare Vermögen verloren hat, doch noch das Verhältniſs des Thalers zum Groschen in der Erinnerung bleibt.

Man mag über diese Art zu philosophiren, welcher sich die Theorie der Gränz-Verhältnisse bedient, auch noch so glimpflich urtheilen; daſs in ihr viel Widersinniges liegt, läſst sich mit aller Mühe nicht abläugnen. Wenn z. B. die Differenziale Nullen sind, so ist ihr Verhältniſs ein Verhältniſs von Nichts zu Nichts. Man soll aber, zufolge der obigen Erklärung, anstatt dieses letztern ein bloſs eingebildetes Verhältniſs unterschieben, welches nicht von der Quantität der Veränderungen (Incremente oder Decremente) sondern bloſs von den veränderlichen Gröſsen selbst abhängt. Die gebrauchten Nullen $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{0}{0}$, dienen also nur als ein Merkzeichen oder Nota-bene, daſs man hier das Verhältniſs $x : y$ nicht vergessen müsse. Nun wird jeder Unbefangene fragen: wozu denn ein so unnützer Aufwand von Spitzfindigkeiten, um es dahin zu bringen, daſs ein Paar Nullen hier nicht als Nullen, sondern als Rechenpfennige mit der Bedeutung x und y angesehen werden mögen? Warum läſst man, wenn alles nur auf das Verhältniſs $x : y$ ankommt, nicht den Firlefanz der stellvertretenden Nullen ganz weg, und nimmt die veränderlichen Gröſsen selbst als Verhältniſs-Glieder in Rechnung? — — Diese und ähnliche Fragen hätten in der Theorie der Gränz-Verhältnisse zur Sprache kommen müssen, um theils mancherlei nicht ganz versteckte Widersprüche, theils leere Spitzfindigkeiten in ihren Erklärungen zu vermeiden. Man sieht indessen sehr wohl, daſs dieser Theorie der Begriff eines Differenzials viel zu schaffen mache. Sie gesteht das ein (S. 815) beruhigt sich aber dadurch (S. 816) „daſs auch Leibnitz, so sehr er Philosoph war, doch nicht mit dem Begriff von Differenzialen ganz aufs Reine gekommen zu seyn scheine. Wenigstens bediene er sich solcher Ausdrücke, die Erklärungen und Einschränkungen bedürfen.“ Dabei wird eines Aufsatzes von Leibnitz in den Actis Erud. Lips. Octobr. 1684 gedacht, in welchem er sich sehr unverständlich über den Begriff eines Differenzials und

momentanen Increments oder Decrements geäussert haben **soll**. Es ist hier der Ort noch nicht, den ursprünglichen Begriff eines Differenzials genauer zu bestimmen. Doch mufs bemerkt werden, dafs die eben angeführte Stelle eine von denen ist, in welchen die Bedeutung eines Differenzials so klar und faslich vor Augen liegt, dafs sie nicht verkannt werden kann, wenn man sich nur nicht durch vorgefafste Meinungen das Verständnifs derselben erschweret. Uebrigens ist es die Theorie der Gränz-Verhältnisse nicht allein, welche Leibnitzen beschuldigt, dafs er nicht so recht gewufst habe, was ein Differenzial sey. Doch Beschuldigungen dieser Art müssen von selbst wegfallen; weil ein Differenzial-Kalkul ohne den ihm voraufgehenden klaren Begriff eines Differenzials nicht gedenkbar ist.

2) Zusätze zu der Lehre von den Gränz-Verhältnissen.

α) „Die Symbole ∂x, ∂y müssen durchaus nicht als Gröfsen betrachtet werden, so klein man sich diese auch vorstellen möchte. Denn dadurch setzt man eine Näherungs-Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ oder $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, anstatt der genauen und vollständigen $\partial y = nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\partial x^2 + \ldots\ldots$ welche noch die Potenzen von ∂x enthält.“ (a. a. O. S. 813).

β) „Die Differenziale darf man nicht als Null betrachten, weil sie dadurch aufhören Differenzen zu seyn, und weil es auch nicht begreiflich ist, wie eine Null sich mit einer andern Null vergleichen lasse.“ (Ebendaselbst.)

Das ist doch ein offenbarer Widerspruch, wie sehr die Theorie der Gränzen sich auch bemühen mag, ihn weg zu vernünfteln. Sie giebt nämlich den Rath, $\frac{\partial y}{\partial x}$ so anzusehen, als bedeute es den characteristischen Theil p oder nx^{n-1} des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dann heifst es weiter: „Sollen ∂y und ∂x nicht blofse Buchstabenzeichen zur Bezeichnung des Ursprungs der Function p seyn, so sind es keine Veränderungen der Gröfsen x und y, sondern zwei zusammengehörige Gröfsen (!) die mit jenen in eine gewisse Verbindung gebracht werden, wie die Coordinaten der Tangente einer Curve mit den Coordinaten der krummen Linie selbst. Die Quantität dieser nebenher (!!) eingeführten Gröfsen bleibt willkührlich; nur ihr Verhältnifs ist durch die Function p bestimmt.“— Geht hieraus wohl etwas anderes hervor, als dafs jedes Differenzial ein Null

mit Quantität sey? — und was läſst sich dabei denken? —— Wenn übrigens die Differenziale nur nebenher eingeführte Gröſsen sind, so kann man ihrer wohl eigentlich entbehren; und warum wirft man diese Nebenläufer nicht ganz aus dem Kalkul weg? —— Sehr unrichtig ist es, zu behaupten, daſs die Quantität eines Differenzials (im eigentlichen Verstande) willkührlich sey, und (S. 813) der Ausdruck Differenzial nicht im Singular, sondern bloſs im Plural gebraucht werden müsse; weil das erstere eine Quantität auf versteckte Art in sich schlieſse, und man doch jenen Ausdruck nur in sofern dulden könne, als er ein Verhältniſsglied bedeute. Denn jedes Differenzial muſs angesehen werden als eine Differenz, welches die Theorie der Gränz-Verhältnisse nicht nur einräumt, sondern sogar von selbst darauf dringt. Nun ist aber fürs Erste jede einzelne Differenz schon eine Differenz, ohne daſs noch eine zweite nöthig wäre, die gleichsam ihre Kundschaft (testimonium literarum) vorstellen oder ihr sicheres Geleit geben müſste. Fürs Zweite kann eben darum, weil sie eine Differenz ist, ihre Gröſse nicht willkührlich seyn, sondern sie hängt nothwendig ab von der Art und dem Grade der Veränderung ihrer veränderlichen Gröſse. —— Nun wird ferner behauptet:

γ) „Es ist erlaubt, sich die Differenziale als unendlich kleine Unterschiede vorzustellen, und muſs sogar geschehen, da wo man sich eine stetige Folge veränderlicher Gröſsen (etwa Glieder in einer Reihe? ——) gedenkt.“ (a. a. O. S. 815.)

δ) „Differenziale sind die bloſs unter sich vergleichbaren Unterschiede der unmittelbar auf einander folgenden Glieder einer stetigen Reihe.“

Wenn stetige Reihe nichts weiter heissen soll, als eine arithmetische oder geometrische Reihe, in welcher keine Glieder zwischen dem ersten und letzten fehlen, und der Zusatz „bloſs unter sich vergleichbar“ aus δ wegbleibt: so ist dies eine sehr genügende Definition eines leibnitzischen Differenzials. Der Zusatz ist unstatthaft, weil man jedes Differenzial nicht nur mit einem andern, sondern auch mit einer beständigen Gröſse vergleichen kann, sobald das Verhältniſs zweier Differenziale einem Verhältnisse zweier beständigen Gröſsen gleich gesetzt werden darf. Das ist unter andern der Fall bei der Quadratur derjenigen Linie deren Gleichung $\frac{b}{a} x = y$ ist, wo man also die Proportion $a : b = \partial x : \partial y$ oder $a : \partial x = b : \partial y$ erhält.

§. 19.

Die Bestimmtheit und Klarheit, welche man fast durchgängig bei den Lehrsätzen und Erklärungen in der Theorie der Gränzen vermifst, fehlt auch manchen ihrer wichtigsten Begriffe. Hieher gehören vorzüglich zwei, nämlich der Begriff der unendlichen Annäherung zweier Verhältnisse, und der Begriff der höhern Differenziale.

1.) Was den erstern betrifft, so erhellet aus der angeführten Erklärung eines Differenzial-Verhältnisses §. 18, 1. α bis ε, und aus dem Haupt-Lehrsatze §. 17. Num. 4, dafs das Verhältnifs der Differenziale $\partial x : \partial y$ sich dem Verhältnisse beider veränderlichen Gröfsen $x : y$, oder auch dem Verhältnisse des sogenannten Differenzial-Quotienten zu Eins, nämlich $p : 1$ oder $nx^{n-1} : 1$, unendlich nähere. Soll hier unter dem Ausdruck einer unendlichen Annäherung verstanden werden: „je länger die Veränderung dauert, desto mehr stimmt $x : y$ mit $\partial x : \partial y$ überein“? —— oder: „durch die Rechnungs-Operation des höhern Kalkuls wird das Verhältnifs $\partial x : \partial y$ dem Verhältnisse $x : y$ so nahe gebracht, dafs sich kein namhafter Unterschied mehr angeben läfst“? —— Die erstere Bedeutung würde nur nach Verlauf einer unendlichen Zeit, also niemals verstatten, das Verhältnifs $\partial x : \partial y = x : y$ zu setzen. Daher leidet blofs die letztere eine Anwendung. Es giebt nun zwar einige Fälle, wo nicht nur eine Annäherung, sondern auch sogar eine völlige Gleichheit zwischen $\partial x : \partial y$ und $x : y$ Statt findet, wie unter andern bei der graden Linie und Cykloide, wo durchaus $x : y = \partial x : \partial y$ bleibt. Aber ist die Gränzen-Theorie im Stande, in allen möglichen Fällen, eine wo nicht völlig doch beinahe erreichte Gleichheit zu erweisen; oder ist sie nur eine willkührliche Voraussetzung? —— Ohne Zweifel dies letztere. Dann aber verwickelt sich jene Theorie in einen Widerspruch, denn sie nimmt, wo nicht immer, doch sehr oft ihre Differenziale ∂x und ∂y für beständig an. Dagegen sind x und y veränderlich, und können kein anderes, als ein veränderliches Verhältnifs geben. Wie ist es nun möglich, vermittelst zweier beständigen Verhältnifs-Glieder ein veränderliches Verhältnifs $\partial x : \partial y$ darzustellen? Es enthält also, nach den eigenen Begriffen der Gränzen-Theorie einen Widerspruch, $\partial x : \partial y = x : y$ zu setzen, wenn nicht wenigstens Eins von den Verhältnifsgliedern ∂x und ∂y durchaus veränderlich bleibt. Aber eben darum rechnet man denn mit dem veränderlichen Differenzial-Verhältnisse grade so, wie

mit einem beständigen Verhältnisse. Das ist fürs Erste an sich unmöglich, weil man sonst nie einen höhern Kalkul nöthig gehabt haben würde. Fürs Zweite, wenn die Theorie der Gränzen den Satz: „es könne mit einem veränderlichen Verhältnisse $x:y$ grade so gerechnet werden, wie mit einem beständigen $a:b$, sobald man die Verhältnifs-Glieder in jenem gegen andere vertauscht, welche das Verhältnifs $x:y$ nicht genau, sondern um etwas Weniges falsch ausdrücken," stillschweigend voraussetzt: so trennt sie sich dadurch auf immer nicht nur von dem Differenzial-Kalkul, sondern auch von der Fluxionsrechnung; weil es einen der Grundbegriffe beider Methoden ausmacht, dafs kein veränderliches Verhältnifs im Kalkul so gebraucht werden könne, wie ein beständiges. Hier hat also die Gränzen-Theorie noch vieles aufzuklären und zu berichtigen, blofs um die Widersprüche zu beseitigen, welche ihr zum Vorwurfe gereichen.

2.) Wenn sie die Frage beantworten soll: warum die Gränze eines veränderlichen Verhältnisses, nachdem sie schon einmal gefunden worden ist, in gewissen Fällen doch noch zum zweiten, in andern zum dritten, viertenmal gesucht, oder warum Differenzio-differenziirt werden müsse: so läfst sie sich (a. a. O. Art. Differenzial und Gränze) darüber folgendermafsen aus.

α) „Bei Gleichungen vom zweiten Grade, und bei höheren Gleichungen, sind mehrere Gränz-Verhältnisse für unendliche x und y möglich. Es giebt z. B. $y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$ durch x^2 dividirt, $\frac{y^2}{x^2} + \frac{ay}{x} + b + \frac{cy}{x^2} + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} = 0$, und wenn für mögliche unendliche x und y der Quotient $\frac{y}{x} = p$ ist, $\frac{\infty^2}{\infty^2} + \frac{a\infty}{\infty} + b + \frac{c}{\infty} + \frac{e}{\infty^2} = p^2 + ap + b = 0$, also $p = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$, und die Gränze von $y:x = p:1$. Ist hier $\frac{1}{4}a^2 < b$, so giebt es keine unendlich grofsen x und y, wie bei den Coordinaten einer Ellipse. Aber für $\frac{1}{4}a^2 > b$ sind zwei Gränz-Verhältnisse vorhanden, wie nämlich an einer Hyperbel; und ist $\frac{1}{4}a^2 = b$, so giebt es nur ein einfaches Gränz-Verhältnifs, wie an der Parabel."

β) „Wenn y als Function von x den Differenzial-Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ giebt: so ist p eine neue Function von x, und nur unter der Bedingung eine unveränderliche Gröfse, dafs beide y und x Glieder einer arithmetischen Progression sind. Man suche daher für p, so wie es für y geschehen

ist, den Differenzial-Quotienten, und es sey $\frac{\partial p}{\partial x} = q$: so ist q wieder eine Function von x, und entweder beständig oder veränderlich. Man bezeichnet sie auch durch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es ist nämlich dieser Quotient der von den Veränderungen der Gröſsen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, wo $\Delta^2 y$ das Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe zu der Reihe der y bedeutet, wenn die zugehörigen x sich gleichförmig um Δx verändern. Auf diese Art lassen sich noch höhere Differenzial-Quotienten finden. In einigen Fällen, z. B. wenn $y = x^n$ und n eine ganze Zahl ist, kommt man zuletzt auf einen constanten Werth des Differenzial-Quotienten." u. s. w.

Wenn unter α gemeint wird, es gebe für eine Function so viele Differenziale (und Differenzial-Verhältnisse) auf einmal, als Wurzeln in derselben sind: so ist dies falsch, weil man sich schon durch die bloſse mechanische Differenziation vom Gegentheil überzeugen kann. Iede Function hat als Ein Ganzes, ohne Rücksicht darauf, ob sie mit irgend einer geometrischen Linie oder Figur in Beziehung stehe, oder nach der Theorie der Gleichungen in mehrere Wurzeln aufgelöset werden könne, auf einmal nicht mehr, als ein einziges Differenzial. Denn fürs Erste, sie mag auch noch so zusammengesetzt seyn, so läſst sie sich doch jederzeit einer andern ganz einfachen z. B. ay gleich setzen. Da nun diese letztere für einmal nur ein einziges Differenzial verstattet, so kann die obige fx in dieser Verbindung auch nicht mehr erhalten. Fürs Zweite, die algebraischen Wurzeln oder verschiedenen Werthe der veränderlichen Gröſse einer Function, dürfen bei der Differenziation gar nicht einmal in Betracht gezogen werden; denn hier kommt es lediglich auf die Beschaffenheit der Veränderungs-Form des Ganzen an. Fürs Dritte, Differenziale sind keine Wurzeln der Gleichung, vielmehr verhalten sie sich, sofern sie aus irgend einer Binomial-Verbindung entstehen müssen, zu ihren Stammgröſsen, wie Potenzen zu den einzelnen Binomial-Theilen. Eine Bemerkung, die Leibnitz in seinen mathematischen Aufsätzen öfter gemacht hat, und welche über die Gesetze des Mechanismus der Differenzial-Rechnung einen groſsen Aufschluſs giebt. Hienach stimmt also die obige Voraussetzung mit der Natur der Differenziale nicht überein.

Was die Behauptung unter β betrifft, so bedarf sie gleichfalls mehrere Berichtigungen. Fürs Erste, wenn es heiſst: „der Differenzial-Quotient ist nur unter der Bedingung eine unveränderliche Gröſse, daſs beide y und x Glieder einer arithmetischen Progression sind“: so kommen ja im Differenzial-Kalkul keine andern, als solche veränderlichen Gröſsen vor, die entweder unmittelbar oder mittelbar theils arithmetische theils geometrische Progressionen bilden. Dessen ungeachtet haben sie nach Umständen, ihre zweiten, dritten und folgenden Differenziale. Fürs Zweite, es sollen die Differenzial-Quotienten nicht eher, als in der Gestalt $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots x^0$, wo n eine ganze Zahl seyn muſs, Beständigkeit erhalten. Demnach ist $\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots x^{n-m}$ noch eine veränderliche Gröſse, und es kann im ersten Theil sowohl der Divisor als der Dividend für veränderlich angenommen werden. Aber die Theorie der Gränzverhältnisse erklärt ∂x für beständig, und stellt den Satz auf, es sey für $\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\Delta^2 y$ das Anfangsglied der zweiten Differenzenreihe für die Reihe $y, y + \Delta y, y + \Delta y + \Delta^2 y + \ldots\ldots$ u. s. w. unter der Bedingung, daſs die Differenzenreihe der Δx, also die ersten Differenzen der zugehörigen Reihe x gleichförmig, das heiſst gleich groſs sind. Dies ist ein Irrthum; denn wenn zwei veränderliche Gröſsen gleich gesetzt werden können, und die eine von beiden in dieser Verbindung keine zweiten oder dritten Differenzen leidet, so kann auch die andere sie nicht haben. Eben so verhält es sich mit Differenzialen, wenn man nicht unrichtiger Weise die Incremente Δx, ∂x u. s. w. überall für die eigentlichen Differenziale ansieht. Bis hieher ist also immer noch nicht ein Grund nachgewiesen, warum die höhern Differenziale die Form $\partial^m y = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots x^{n-m}\partial x^m$ haben müssen, und noch weniger, warum sie überhaupt, um des Begriffes der Gränzen willen, Bedürfniſs für den Kalkul werden. Denn wenn diese Gränzen-Rechnung sich heraus nimmt, veränderliche Verhältnisse und daraus entstehende Gleichungen grade so zu behandeln, als beständige; was braucht sie sich dann darum zu kümmern, ob ihre Differenzial-Quotienten Beständigkeit haben oder nicht.

Alle diese Bemerkungen zusammen genommen beweisen genugsam, daſs die Theorie der Gränz-Verhältnisse, anstatt den Differenzial-Kalkul aufzuhellen, nur noch mehr Dunkelheit über ihn verbreitet hat.

Fünfter Abschnitt.

Prüfung der Nullen-Rechnung, als Grundlage des Differenzial-Kalkuls.

§. 20.

Die neuere Nullenrechnung ist von der Theorie der Gränz-Verhältnisse nicht sehr verschieden, indem sie wie diese ein Differenzial-Verhältnifs sucht, und es allgemein durch $\frac{0}{0}$ ausdrückt. Iedoch philosophirt sie nicht so weitläuftig darüber, wie es möglich sey, aus diesem $\frac{0}{0}$, welches jedem schlichten Rechner Nichts giebt, Etwas und zwar Rechnungs-Resultate herzuleiten, die alle älteren und neueren Mathematiker bis auf die Erscheinung der Nullenrechnung nicht daraus herzuleiten im Stande waren; sondern sie nimmt sich kurz und gut die Freiheit, $1 : 12 = 0 : 0$, $2 : 3 = 0 : 0$, kurz alles was beliebt $= 0 : 0$ zu setzen *). Dabei verlangt sie gar nicht, wie die Theorie der Gränzverhältnisse, sich bei diesen Nullen dasjenige Verhältnifs zu denken, welches die unendlich abnehmenden Gröfsen in dem Augenblick vor ihrem Verschwinden hatten, sondern sie erkläret rund heraus: Erstlich, es müsse jedes Differenzial als ein absolutes und eigentliches Null oder Nichts, fürs Zweite, jedes Differenzial-Verhältnifs auch als ein Nichts im eigentlichsten Verstande betrachtet werden. (a. a. O. S. 195 u. 197.) Wer (S. 221) die Differenzial-Rechnung für etwas anders, als eine künstliche Nullenrechnung, und daher das sinnreichste und höchste Kunstwerk des menschlichen Geistes halten wolle, der erniedrige sie, und untergrabe ihr ganzes Fundament als ungereimt und widersprechend. Leibnitz und Wolf (S. 203 und 204), welche sich durch ihre Erklärungen der Differenzial-Rechnung eines solchen Fehlers schuldig gemacht haben, stehen mit sich selbst im Widerspruch. Soll das Fundament des Differenzial-Kalkuls eben so fest und unerschütterlich seyn, als das Fundament der gemeinen Arithmetik, so müsse jener als künstliche Nullenrechnung betrachtet werden. Es sey ganz unläugbar das Verhältnifs $0 : 0$ unter allen möglichen Verhältnissen das allgemeinste, indem es nicht nur alle möglichen endlichen und unendlichen Gröfsen, sondern auch selbst die Null unter sich begreift, so

---

*) Joh. Schulz sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathem. Theorien. Königsberg 1803. S. 217.

dafs man mit Recht sagen könne (S. 218), das Hauptgeschäft der ganzen Mathematik bestehe blofs in der Entwickelung des Verhältnisses $0:0$. Denn man habe $0 . 0 = 0 . 0$ also $0 : 0 = 0 : 0$, $1 . 0 = a . 0$ also $1 : a = 0 : 0$, $a . 0 = \infty . 0$ also $a : \infty = 0 : 0$. Wenn daher die Ausdrücke $\frac{0}{0} = \frac{1}{a}$ oder $\frac{0}{0} = \infty$ oder $\frac{0}{0} = 0$ vorkommen, so müsse man verstehen $\frac{1 \times 0}{a \times 0} = \frac{1}{a}$, $\frac{\infty \times 0}{1 \times 0} = \frac{\infty}{1}$ und $\frac{0 \times 0}{0 \times 0} = \frac{0}{1}$, eben so wie man sagt $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$, $\frac{\infty x}{1x} = \frac{\infty}{1}$ u. s. w. Hieraus gehe klar hervor (S. 217.), dafs wenn man nur die Regeln der Arithmetik genau und strenge befolge, die Rechnung mit Nullen eben so gründlich und apodictisch gewifs seyn müsse, als die mit wirklichen Gröfsen und Zahlen, u. s. w.

Kaum sollte man glauben, dafs es möglich gewesen sey, anstatt der bisherigen Einfachheit und Klarheit, in den so alt gewordenen, und in seiner uralten Form immer für wahr befundenen Kalkul, ein so verworrenes Gemengsel von Begriffen und Sätzen zu bringen, wo einer dem andern widerstreitet, und jeder mit sich selbst im Widerspruch steht, und solchen Widersinn sogar für die Grundlage nicht nur der Differenzial-Rechnung sondern auch der gesammten Gröfsenlehre auszugeben. Aber gleichwohl hat die künstliche Nullenrechnung ihre Anhänger und Vertheidiger gefunden. Es werden indessen nur wenige Beläge nöthig seyn, um zu beweisen, dafs das Gewebe von widersinnigen Lehrsätzen, welches man hier an die Stelle des leibnitzischen Differenzial-Kalkuls gesetzt hat, nichts weiter, als ein leerer Wirrwarr ist.

1) Die Definition eines Differenzials lautet (S. 192) also: „Wenn bei veränderlichen Gröfsen die Zunahmen (Incremente) $= 0$ sind, so heissen sie Differenziale.“ —— Aber die Zunahme und Abnahme jeder beständigen Gröfse ist auch $= 0$; denn eben deshalb ist sie unveränderlich, weil sie weder gröfser noch kleiner wird. Aus dieser Definition folgt also, dafs eine veränderliche Gröfse, wie sie die Nullenrechnung gebraucht, mit einer beständigen ganz einerlei ist.

2) Die Differenzial-Rechnung wird (S. 191) so definirt: „Die Wissenschaft, aus der Zunahme der veränderlichen Gröfsen diejenige Gleichung zu finden, welche entsteht, wenn die Zunahmen alle als Nullen angesehen werden.“

Hier fodert man Zunahmen, welche keine Zunahmen sind. Das ist ein offenbarer Widerspruch. Auch werden hier veränderliche Grösen vorausgesetzt, welche weder eine Zunahme noch eine Abnahme leiden: also veränderliche Grösen, welche keine veränderlichen Grösen sind. Das ist ein zweiter Widerspruch in einer einzigen Definition!

3) „Iedes Differenzial ist (S. 195) nicht nur relativ gegen diese oder jene Grösse, sondern absolut und schlechthin im strengsten Sinne Null. Wenn man daher in einer Differenzial-Gleichung nach ihrem eigentlichen Werthe fragt: so setzt dieselbe nichts weiter, als $0 = 0$.“ — —

4) „Es ist (S. 212) einleuchtend, dass wenn der Satz $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{0}{0}$ nur unter der Bedingung wahr wäre, dass eine absolute Null grösser als die andere ist, die ganze Differenzial-Rechnung auf einem Grunde ruhete, dessen Ungereimtheit unwiderlegbar wäre. Daher bleibt es (S. 216; 33) eine eben so unumstössliche Wahrheit, dass jedes Verhältniss zweier Differenziale ein wirkliches Verhältniss zweier Nullen ist, als dass alle Nullen einander gleich sind.“

5) „Obgleich (S. 196) die Differenziale wahre Nullen sind, so gehört es dennoch zum Wesen der Differenzial-Rechnung, dass man sie nicht durch (die gewöhnlichen) Nullen ausdrückt; weil sonst aller Unterschied zwischen den Differenzial-Gleichungen wegfiele.“ — — Hier verlangt man also einen Unterschied, welcher nach Num. 3. und 4 kein Unterschied ist. Eine offenbare Ungereimtheit!

6) „Iede Function hat (S. 192) ihre besondere Zunahme, also auch ihr besonderes Differenzial.“ — — Aber nach Num. 2. sind alle (differenzielle) Zunahmen oder Abnahmen, und nach Num. 3. alle Differenziale im strengsten Sinn $= 0$. Daher bedarf die künstliche Nullenrechnung einige besondere Nullen, die sich jedoch nach Num. 4. vor den gemeinen Nullen gar nicht auszeichnen dürfen. Eine höchst widersinnige Bedingung!

7) „Wenn Euler in seinen Institut. calculi different. glaubt, dass in der Proportion $2 : 1 = 0 : 0$ die erste Null zweimal grösser seyn müsse, als die zweite: so wird dieser für alle Proportionen, deren Glieder insgesammt wirkliche Grössen sind, unläugbar allgemein gültige Satz hier sehr unrichtig angewandt, wo der besondere, aber in Rücksicht seiner Anwendung sich sehr

weit erstreckende Fall ist, in welchem ohne irgend einen Widerspruch das Verhältnifs zweier ungleichen Glieder, dem Verhältnisse zweier gleichen gleich seyn kann, nämlich wenn die letztern beide Nullen sind." (S. 216.) —— Diese eulersche Proportion ist der wahre Probirstein für die Aechtheit der künstlichen Nullenrechnung. Er giebt ungeachtet ihrer unnützen Künstelei, doch immer das Resultat $\frac{2}{1} = 0$ also $2 = 0$ u. dgl., welches nur zu Ungereimtheiten führen kann.

8) „Das Differenzial einer beständigen Gröfse ist $= 0$, und fällt als solches weg." (S. 192 und 220, wo ∂x als eine beständige Gröfse behandelt wird.) Verbinden wir hiemit Num. 3, so entsteht der Gegensatz: „das Differenzial einer veränderlichen Gröfse ist ebenfalls $= 0$, fällt aber darum nicht weg." —— Liegt nun der Grund des Wegfallens in dem Null-Seyn, so entsteht ein offenbarer Widerspruch; liegt er nicht darin, so ist kein Grund vorhanden, warum eine beständige Gröfse nicht eben so gut wie eine veränderliche, die sich nach Num. 1 und 2. um nichts ändern soll, ein Differenzial haben könnte.

9) „Die Differenzial-Rechnung soll (S. 190) den Vortheil verschaffen, dafs man die eigentliche Natur der Zunahme einer Function im wesentlichen bequem überschauen kann." —— Dies wird als Grund angenommen, warum einige Glieder aus den Differenzialen wegzuwerfen sind. Um sie aber wegwerfen zu dürfen, müssen in der Binomial-Reihe (S. 189)

$$\Delta z = nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,x^{n-3}\Delta x^3 \,.....$$

die Coefficienten Δx^2, Δx^3.... also auch $\Delta x = 0$ seyn. Es werden daher alle auf das erste folgenden Glieder wegen ihres Coefficienten Null weggeworfen; aber das erste Glied bleibt, weil es denselben Coefficienten Null hat. Ist das nicht der klarste Widerspruch? —— Und warum bleiben nicht zwei oder drei Glieder stehen, die sich doch immer noch bequem genug übersehen lassen? —— Hat die künstliche Nullenrechnung hier keinen bessern Grund anzugeben, so wirft sie die Binomial-Glieder nach dem zweiten, ohne einen vernünftigen Grund weg.

10) „Die zweiten Differenziale (S. 219) sind Differenziale von ∂x, ∂z u.s.w. Denn obgleich die letztern alle mit einander Nullen sind, so müssen doch einige Differenzial-Verhältnisse als absolute Nullen, andere als beständige, noch andere als unendliche, einige aber auch als veränderliche Gröfsen betrachtet wer-

den. Diese letztern geben höhere Differenziale, und man kann von ∂x zu $\partial^2 x$, $\partial^3 x$ u. s. f. fortgehen. Da aber (S. 220) der Quotient $\frac{\partial x^2}{\partial^2 x}$ (nämlich aus $\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ wenn ∂x allein als veränderlich angesehen wird) unbestimmt ist: so erhellet zugleich, daſs wenn man das erste Differenzial ∂x als veränderlich annimmt, das Verhältniſs der zweiten Differenziale $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$ gleichfalls unbestimmt bleibt, welches denn auch von den Verhältnissen aller höhern Differenziale gelten muſs. Sollen daher die letztern bestimmt werden, so muſs man, wenn z die Function von zwei veränderlichen Gröſsen x, y zugleich wäre, entweder ∂x oder ∂y als beständig annehmen.“ — — Diese Regeln sind eben so grundlos, als verworren. Fürs Erste, was bedeuten hier die Ausdrücke bestimmt und unbestimmt? — — Wenn von einem Differenzial gesagt werden kann, es ist das erste, zweite, dritte etc., so ist es nicht nur in Absicht auf seinen Rang, sondern auch in Hinsicht seiner Form oder Characteristik hinreichend bestimmt. Die Unbestimmtheit ist hier also, wenn man davon wegdenkt, daſs das Null, als ein algorithmisches Chamäleon, unzählig viele Gestalten annehmen, und den Rechner wohl zuweilen äffen könnte, bloſs erdichtet. Fürs Zweite, wenn das sogenannte Differenzial-Verhältniſs $\frac{\partial z}{\partial x}$ veränderlich seyn soll, so können drei mögliche Fälle Statt finden, entweder beide Glieder sind veränderlich, oder das eine von beiden allein. Woher will die Nullenrechnung ein sicheres Merkmal nehmen, daſs hier ∂x oder ∂z allein, und dort jedes von beiden veränderlich sey? Der obige Bestimmungsgrund, daſs die Differenzial-Verhältnisse unbestimmt seyn würden, wenn man ∂x als veränderlich annehmen wollte, ist ganz nichtig und sinnlos; denn es ist ja noch nicht einmal die Frage beantwortet, was ist zu bestimmen, oder warum bestimmt ∂x^2 das Unbekannte, was zu bestimmen ist, besser, als $\partial^2 x$? Eben darum haben die gegebenen Regeln gar keine Haltung. Auch sind sie dem leibnitzischen Differenzial-Kalkul durchaus fremde; denn seine Veränderungs-Formen beruhen auf einer ganz andern Grundlage, als auf Null und Nichts.

§. 21.

Man hat sich hier verschiedene Ausdrücke ersonnen, um einzelne Differenzial-Formeln zu erkünsteln, und nachdem dieses gelungen war, jene für das

Fundament der Differenzial-Rechnung ausgegeben, ohne jedoch die Möglichkeit nachzuweisen, wie alle Differenzialformeln aus demselben Grundschema auf eine ganz ungezwungene Weise hergeleitet werden können. Anstatt dessen behilft man sich mit dem längst bekannten Mechanismus des leibnitzischen Differenzial-Kalkuls. Die Dürftigkeit dieser vernullenden Differenzial-Methode wird sehr bald einleuchten, wenn man auch nur eine, oder ein Paar Arten derselben näher untersucht, welches hier geschehen soll.

1) Man setzt $x - x = \partial x = 0$, $x^2 - x^2 = \partial(x^2) = 0$, $x^n - x^n = \partial(x^n) = 0$, und läfst die bekannten Differenziale $\partial(x^2) = 2x\partial x$, $\partial(x^n) = nx^{n-1}\partial x$ aus der Function $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ auf folgende Art entstehen. Die wirkliche Division giebt hier die Reihe $x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + x^{n-n}y^{n-1}$, und wenn der Exponent nach einander die Zahlenwerthe 2, 3, 4, 5 ..... erhält, so entstehen die Ausdrücke $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$, $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$ u. s. w. Wenn nun $x = y$ genommen wird, so kommt einmal $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = 2x$, ein andermal $\frac{x^3 - x^3}{x - x} = 3x^2$, und ganz allgemein $\frac{x^n - x^n}{x - x} = nx^{n-1}$. Vertauscht man in diesen Ausdrücken $x - x$ mit ∂x u. s. w. so entstehen die sogenannten Differenzial-Verhältnisse $\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = \frac{0}{0} = 2x$, $\frac{\partial(x^3)}{\partial x} = \frac{0}{0} = 3x^2$, $\frac{\partial(x^n)}{\partial x} = \frac{0}{0} = nx^{n-1}$, und die Differenziale $\partial(x^2) = 2x\partial x$, $\partial(x^3) = 3x^2\partial x$, $\partial(x^n) = nx^{n-1}\partial x$. Diese Erfindung verdankt die neuere Nullenrechnung einem gewissen Nicolas Morville, und sie scheint zuerst in den Schriften der königl. dän. Ges. d. Wiss. vorzukommen *).

2) Einen ähnlichen Versuch, einzelne Differenzial-Formeln zu erkünsteln, enthält eine kleine französische Schrift, unter dem Titel: Recherches sur le calcul differentiel et integral par le citoyen Ensheim, à Par. an VII. 4, deren Verfasser den Engländer Landen nachgeahmt zu haben scheint. Es wird vorausgesetzt, dafs m eine positive und ganze Zahl sey, und nun die Function

*) Abhandlungen aus der neuen Sammlung der Schriften der kön. dän. G. d. W. übersetzt von D. P. Scheel und C. F. Degen. Bd. I. Abth. I. S. 82. Kopenh. 1798.

$\frac{v^m - 1}{v - 1}$ in die Reihe $v^{m-1} + v^{m-2} + v^{m-3} + \ldots\ldots + 1$ aufgelöset, welche m Glieder haben muſs. Für $v = 1$ giebt sie die Summe $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = m$. Dann soll $y(\acute{y} - 1)$ mit ∂y und $y^m(\acute{y}^m - 1)$ mit $\partial(y^m)$ gleichbedeutend seyn. Unter dieser Bedingung läſst sich die Function $\frac{\partial(y^m)}{\partial y} = \frac{y^m}{y}\left(\frac{\acute{y}^m - 1}{\acute{y} - 1}\right)$ in die Reihe $\frac{y^m}{y}$ $(\acute{y}^{m-1} + \acute{y}^{m-2} + \acute{y}^{m-3} + \ldots\ldots + \acute{y} + 1)$ verwandeln, und man erhält für $\acute{y} = 1$ den Ausdruck $\frac{y^m(\acute{y}^m - 1)}{y(\acute{y} - 1)} = y^{m-1}(m)$ oder $\frac{\partial(y^m)}{\partial y} = my^{m-1}$, also das Differenzial $\partial(y^m) = my^{m-1}\partial y$.

Es lohnt nicht der Mühe, noch mehr Einfälle dieser Art anzuführen, zumal es leicht ist, eine Menge solcher Ausdrücke auf analytischem Wege ausfindig zu machen. Sie sind überhaupt nichts weiter, als Summenformeln für die Reihen, welche man entweder durch die hier angewandte gemeine Division, oder mit Hülfe der Theorie der Functionen erhalten kann. Wie inconsequent es sey, dem leibnitzischen Differenzial-Kalkul eine solche polygamische Abkunft anzudichten, läſst sich schon daraus einsehen, daſs alle diese und ähnliche besondere Functionen, lange vorher, ehe an sie gedacht worden ist, von ihm unter einer allgemeinen Form in Untersuchung gezogen, und als Summenformeln oder gebrochne Functionen, einer Correction fähig befunden worden sind, wenn der Fall eintritt, daſs sie sich wie hier in $\frac{0}{0}$ verwandeln. Das bekannte Corrections-Verfahren besteht darin, daſs man den Zähler und Nenner der gebrochenen Function besonders differenziirt, beide Differenziale durch Division mit einerlei Factoren im Zähler und Nenner abkürzt, und in den übrig bleibenden Theil der Function den veränderten Werth der veränderlichen Gröſse einführt u. s. w. Wenden wir dieses bei Num. 2. an, so entsteht entweder vermöge der ersten vorgeschriebenen Bedingung, der Ausdruck $\frac{\partial(y^m)}{\partial y} = my^{m-1}$; oder wenn $\frac{y^m}{y}$ als beständig und $\acute{y}$ allein als veränderlich angesehen wird, $\frac{y^m}{y} \cdot m\acute{y}^{m-1}$. Da nun zufolge der zweiten Bedingung $\acute{y} = 1$ werden soll, so kommt $y^{m-1}(m.1) = my^{m-1}$ zum Vorschein. Beide Ausdrücke sind die durch den Differenzial-Kalkul verbesserten Summenformeln der obigen Reihe $\frac{y^m}{y}(\acute{y}^{m-1} + \acute{y}^{m-2} + \ldots\ldots + 1)$ für den

Fall, dafs $\acute{y}=1$ und die Summe der eingeklammerten Glieder $=m$ wird. Wie könnte hier die Function $y^{m-1}\left(\frac{\acute{y}^m-1}{\acute{y}-1}\right)$ dem Differenzial-Kalkul untergeordnet seyn, wenn er ihr untergeordnet wäre? Ienes ist nicht abzuläugnen, darum kann dies letztere nicht Statt finden. Und so verhält es sich mit allen ähnlichen Functionen, deren Sprösling der Differenzial-Kalkul seyn soll. Was noch das schlimmste ist, sie führen zum Theil auf fehlerhafte, zum Theil auf unmögliche Ausdrücke, so dafs ihnen keine Allgemeingültigkeit eingeräumt werden kann. Dafs sie fürs Erste, zuweilen fehlerhafte Ausdrücke hervorbringen, erhellet aus Num. 1; denn obgleich der Umtausch des x für y mittelbarer weise $\frac{x^2-\acute{x}^2}{x-x}=2x$, $\frac{x^3-x^3}{x-x}=3x^2$ und überhaupt $\frac{x^n-x^n}{x-x}=nx^{n-1}$ giebt: so erhält man doch in jedem besondern Fall durch die Division unmittelbar nichts anders, als $\frac{x^2-x^2}{x-x}=x$, $\frac{x^3-x^3}{x-x}=x^2$ und allgemein $\frac{x^n-x^n}{x-x}=x^{n-1}$. Hier fehlt also der für den Differenzial-Kalkul nöthige Coefficient, und es liegt in den beiden mittelbar und unmittelbar entwickelten Formeln ein auffallender Widerspruch, um welches willen diese Art von Ableitung ohne Zweifel nur einen verkrüppelten Differenzial-Kalkul geben kann, der sich selbst zur Last da ist. Fürs Zweite, wenn auch nicht alle solche Erkünstelungs-Functionen, wie man sie füglich nennen darf, den vorhergehenden Fehler an sich tragen, so haben sie doch weder Allgemeingültigkeit noch Selbstständigkeit genug, alle vorkommenden Differenzial-Formeln ohne Beihülfe des schon bestehenden Differenzial-Kalkuls rein aus sich selbst zu entwickeln. Dies gilt auch von der neuesten Gestalt, in welcher sie erschienen sind. Man betrachtet nämlich φx, $\varphi x'$, fx und fx' als verschiedene Functionen von x, nennt $\frac{\varphi x-\varphi x'}{fx-fx'}$ oder $\frac{\varphi x-\varphi x'}{x-x'}=\frac{\Delta(\varphi x)}{\Delta x}$ den Differenz-Quotienten, und wenn $\varphi x=\varphi x'$ wie auch $x=x'$ geworden ist, $\frac{\varphi x-\varphi x}{x-x}$ das ist $\frac{0}{0}=\frac{\partial(\varphi x)}{\partial x}$ den Differenzial-Quotienten, auf welchen es in der Nullenrechnung wie in der Gränzen-Theorie hauptsächlich ankommt *). Nun ist die allererste Bedingung

*) Vergl. Einleit. in das Stud. der Differenzial- und Integr. Rechn. von K. Ch. Langsdorf. Manh. 1814.

einer solchen Grundform Allgemeinheit, das heifst, es müssen keine Fälle vorkommen, wo ihr Gebrauch unmöglich wird, wie auch immer die Functionen φx, $\varphi x'$, fx, fx' u. s. w. beschaffen seyn mögen. Wenn man aber einmal $\varphi x = 3x^2$ und $\varphi x' =$ logn x setzt: so müfste $3x^2 =$ logn x oder $e^{3x^2} = x$ werden, um den Differenzial-Quotienten $\frac{0}{0}$ zu erhalten. Dies ist ganz unmöglich, denn wenn e^{3x^2} in eine Reihe aufgelöset und mit x verglichen wird: so kann wenigstens für den Fall, dafs x eine ganze Zahl seyn soll, kein

$x = 1 + 3x^2 + \frac{9x^4}{1.2} + \frac{27x^6}{2.3} + \frac{81x^8}{2.3.4} + \ldots$ kommen. Diese Differenzial-Rechnung verbauet sich also selber in ihrer Grundlage schon den Weg, jede vorgelegte Function zu differenziiren. Dies ist ein sicheres Kennzeichen, dafs sie der wahre Differenzial-Kalkul nicht seyn könne, mit welchem sie auch höchstens nur einige anscheinende Differenzen, wie $\varphi x - \varphi x'$, $fx - fx'$ u. dgl. gemein hat; denn ihre Differenzialformeln sind gröfstentheils das Eigenthum der eigentlichen Differenzial-Rechnung.

Sechster Abschnitt.

Prüfung der Theorie der analytischen Functionen von J. L. Lagrange, als verbesserte Differenzial-Rechnung unter dem Namen Functionen- oder Derivations-Kalkul.

§. 22.

Wie grofs auch der Beifall seyn mag, welcher der „Theorie des fonctions analytique, contenant les principes du calcul differentiel etc., par J. L. Lagrange, Paris an V“ *) zu Theil geworden ist, so hat sie doch nicht allen Mathematikern genügt; sondern es sind von mehreren Seiten her Einwürfe gegen sie gemacht worden, unter denen folgende zwei die wichtigsten seyn dürften.

1) „Geht man aus dieser Theorie heraus, einerseits zu den entfernteren Sätzen, auf welchen sie in ihrem ersten Ursprunge beruhet, andererseits zu denjenigen Fällen ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik, wo ein Differenzial-Ausdruck nicht durch Derivation (Differenziation) irgend einer Function, sondern durch unmittelbare Betrachtung eines gegebenen Verhältnisses

*) Ins Deutsche übersetzt von J. P. Grüson. Berlin 1798.

gewisser Gröſsen, oder einer geometrischen Figur gesucht wird: so kommen dieselben Schwierigkeiten, denen man ausweichen wollte, wieder zum Vorschein.“

2) „Obgleich die Theorie der analytischen Functionen den Begriff des Unendlich-Kleinen sorgfältig zu umgehen sucht: so ist sie bei der Anwendung auf Gegenstände der Geometrie dennoch genöthigt, zu ihm wieder zurück zu kommen. Sie hat daher vor derjenigen Methode, welche ihn ganz unverhohlen zum Grunde legt, eigentlich nichts voraus, als nur daſs er hier auf eine geschickte Weise versteckt wird.“

Um das Gewicht dieser Einwürfe gehörig zu würdigen, muſs man einerseits den Standpunct und die Ansicht, welche die Theorie der analytischen Functionen dem Differenzial-Kalkul gegenüber genommen hat, andererseits ihre innere Form und ihr äusseres Verhältniſs zu den allgemeinen Grundlagen der Gröſsenlehre näher betrachten. Indem sie über den von Euler, D'Alembert u. a. m. eingeführten Begriff der Gränzverhältnisse das Urtheil fället, er sey nicht deutlich genug, um als Princip einer Wissenschaft zu dienen, die ihre Zuverlässigkeit auf Evidenz gründen soll, stellt sie die leibnitzische Differenzial-Rechnung von einer Seite dar, daſs man fragen muſs, wie haben der Erfinder und die ersten Bearbeiter derselben es wagen können, von einem noch nie klar gedachten, oder nach seinem ersten Zuschnitt auch nur so gedenkbaren Rechnungs-Verfahren jemals richtige Resultate zu erwarten? — — Die Theorie der analytischen Functionen behauptet nämlich (§. 4 und 6.), man habe anfangs, ohne die wahre Theorie zu kennen, bloſs die einfachsten und bequemsten Regeln des Mechanismus von den Operationen des Differenzial-Kalkuls entdeckt, und ihn auf der Voraussetzung gegründet, daſs Gröſsen, die nur um etwas Unendlich-Kleines in Rücksicht ihrer von einander verschieden sind, als gleich betrachtet und behandelt werden können. Da er nun, so wie man ihn anwende, wirklich unendlich kleine Gröſsen betrachte und berechne: so bestehe seine wahre Metaphysik darin, daſs der Irrthum, welcher aus dieser falschen Voraussetzung entspringt, durch einen andern Irrthum verbessert und ausgeglichen werde; durch den Irrthum nämlich, bei der Differenziation bloſs die unendlich kleinen Gröſsen derselben Ordnung zurück zu behalten. Denn wenn man z. B. eine krumme Linie als ein Vieleck von unendlich vielen und kleinen Seiten,

und die Verlängerung der letztern als Tangenten der krummen Linie betrachte: so sey klar, daſs man etwas Irriges voraussetze. Aber der Irrthum werde in der Rechnung durch die Auslassung der unendlich kleinen Gröſsen wieder verbessert. Dieses könne man sehr leicht an Beispielen zeigen, indessen sey es schwer, davon einen allgemeinen Beweis zu geben.

Diesemnach wäre der Differenzial-Kalkul in seiner ursprünglichen Gestalt nichts anders, als eine Rechnungs-Methode, bei welcher Irrthümer durch Irrthümer ausgeglichen werden müssen. In der That eine höchst miſsliche Gröſsenlehre! —— weil man, wegen der Schwierigkeit eines allgemeinen Beweises für die Nothwendigkeit (Richtigkeit) dieser Ausgleichung, nie wissen kann, ob die entgegen gesetzten Irrthümer auch in jedem Fall so beschaffen seyn mögen, daſs die ihnen gegenüber stehenden ganz unschädlich gemacht werden. Zwar wäre der Tadel, welcher hier in Absicht auf die directe Methode der Tangenten über den Differenzial-Kalkul ausgesprochen wird, leicht zu entkräften; denn es wird sich weiter unten zeigen, daſs bei dieser Art von Aufgaben, der Bogen zwischen den Incrementen beider Coordinaten gar nicht als grade Linie, oder als unendlich klein vorgestellt zu werden braucht, indem hier nur nöthig ist, zu drei graden Linien eine vierte Proportional-Linie zu suchen, und eine fünfte aus dem Endpuncte der vierten durch den Endpunct des Increments der Ordinate zu legen, welche nothwendig den Endpunct der letztern treffen und eben darum eine Tangente seyn muſs. Hier ist die höchste geometrische Evidenz, folglich kein Irrthum vorhanden, und eben deswegen auch jede Ausgleichung von jener miſslichen Art ganz entbehrlich. Wie aber, wenn die Theorie der analytischen Functionen gegen dieses eine übel gewählte Beispiel hundert andere aufstellen könnte, vermittelst deren der Anhänger der leibnitzischen Methode überführt würde, sie sey nichts anders, als durch Irrthum zu verbessernder Irrthum? —— und die Verbesserung selbst liege so sehr versteckt, daſs es an Beweisgründen für ihre jedesmalige Möglichkeit (d. i. Allgemeinheit) fehle? ——

Es hat zwar Hr. Carnot in seinen Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal etc. S. 17 u. ff. sich Mühe gegeben, genügend auseinander zu setzen: „pourquoi cette compensation des erreurs commises dans les équations a lieu.“ Aber ungeachtet der langen Reflexion, welche Leibnitz dort redend eingeführt darüber anstellen muſs, bleibt alles in demselben Zustande,

in welchem es die Theorie der analytischen Functionen gefunden hat. Denn dadurch, dafs man einen Fehler so klein als möglich machen kann, hört er nicht auf, ein Fehler und wohl gar noch ein grosser Fehler zu seyn; weil die Bedingung: „so klein als möglich," oft in sehr enge Schranken eingeschlossen ist. Und will man ein Null anstatt des „infiniment petit" in den Kalkul einführen: so wird alles noch fehlerhafter und schlimmer, wie bereits oben bei der Theorie der Gränzverhältnisse und künstlichen Nullen-Rechnung dargethan worden ist.

Mufs man also zugeben, dafs die Ansicht, welche die Theorie der analytischen Functionen vom Differenzial-Kalkul genommen hat, richtig sey, und dafs der Grund seiner „erreurs compensables par des erreurs" in den „infiniment petits ou évanouissans" liege, mit welchen er rechnen soll: so würde ein ganz eigenes Verhältnifs zwischen beiden Rechnungsarten Statt finden. Denn die sogenannten Differenzial-Formeln der leibnitzischen erkläret die lagrangesche für wahr, obgleich dieses aus der räthselhaften Beschaffenheit ihrer ursprünglichen Ableitung, welche auf Irrthümern fufst, nicht einzusehen ist. Und die neue Methode mittelt blofs einen andern Weg aus, auf welchem der Mathematiker zu denselben Formeln gelangen kann, ohne Beihülfe der irrigen Voraussetzung vom Unendlich-Kleinen. Hier ist nun schlechterdings nöthig, zweierlei in Erwägung zu ziehen: Erstlich, wie von den als wahr vorausgesetzten Differenzial-Formeln, durch die Theorie der analytischen Functionen überzeugend erwiesen werden könne, dafs sie zu Rechnungs-Resultaten führen müssen, die nicht leer oder blofs eingebildet sind, sondern sowohl im Felde der angewandten als auch der reinen Mathematik einem wirklichen Gegenstande entsprechen. Diese Gewährleistung ist die Theorie der analytischen Functionen bisher schuldig geblieben: daher fehlt zwischen ihren Derivations-Formeln und den Grundlagen der Gröfsenlehre noch der Zusammenhang; oder mit andern Worten: sie ist, so wie sie dasteht, nicht genugsam begründet. Fürs Zweite, wenn ihr nachgewiesen werden kann, dafs der Begriff des Unendlich-Kleinen zwar nicht ausdrücklich aber doch verschleiert bei ihr gebraucht werde: so trifft sie derselbe Vorwurf, welchen sie dem Differenzial-Kalkul macht; denn sie stützt sich auf verheimlichte Irrthümer, und ist eben darum keinesweges eine verbesserte oder zuverlässiger gewordene Differenzial-Rechnung. Sogar

behält die letztere, nach Lagrange's eigenem Geständnisse (§. 6, §. 108 u. a. m.) den Vorzug einer Einfachheit der Methode und Leichtigkeit der Operation *). Das sind, wenn alles übrige in beiden Rechnungs-Arten sich gegen einander aufwiegen sollte, schon keine geringen Vortheile, und es entsteht noch obenein die wichtige Frage, ob dem Functionen-Kalkul dieselbe Allgemeinheit zukomme, deren die Differenzial-Rechnung sich rühmen darf. Denn es möchte vielleicht noch zweifelhaft seyn, ob jede mögliche Function sich in die hypothetische Form $f(x+i) - fx > o$ fügen könne, nachdem $i = o$ gesetzt worden ist. Findet dieser Zweifel Statt, wie ihn denn die Theorie der analytischen Functionen selbst, z. B. im §. 15, einzuräumen scheint: so würde sich daraus die Schlufsfolge ziehen lassen, dafs ihre Derivation keinesweges eben so unbeschränkt sey, als die Differenziation. Eben darum wäre denn das ganze Fundament des Derivations-Kalkuls nichts anders, als ein blofses Postulat, nämlich die Foderung: „Es mufs für möglich angenommen werden, dafs jede beliebige ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Function, sich in eine Reihe von der Form $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots\ldots$ auflösen läfst."

§. 23.

Die Theorie der analytischen Functionen stellt folgende Hauptsätze auf:

1) Die Entwickelung der Functionen in einer Reihe von der Form $f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3$ u. s. w. enthält die wahren Principien der Differenzial-Rechnung.

2) Der taylorsche Satz, welcher sich durch die Theorie der Reihen beweisen läfst, kann als das Haupt-Princip des Differenzial-Kalkuls angesehen werden.

3) Man kann in der Reihe $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ das i so klein nehmen, dafs jedes Glied gröfser wird, als die Summe aller ihm nachfolgenden.

Dann heifst es am Ende des §. 14.: „dieser Lehrsatz (unter Num. 3.) mufs als ein Fundamental-Satz in der hier vorzutragenden Theorie angesehen wer-

*) In den Memorie di Matematica et di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Tom. XIII. Part. I. Num. 3. hat Pietro Paoli gezeigt, dafs der Differenzial-Kalkul auf eine weit leichtere Art, als der arbogastische Derivations-Kalkul, von welchem jener nur ein besonderer Fall seyn soll, zu den allgemeinen Untersuchungen und Resultaten des letztern führe.

den. In der Differenzial- und Fluxions-Rechnung hat man ihn stillschweigend vorausgesetzt; aber eben darum in jenen Rechnungs-Arten so viele Blöſsen gegeben, besonders bei ihrer Anwendung auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik." Hieraus geht hervor, daſs dieser dritte Lehrsatz der wichtigste ist, und jede vergleichende Untersuchung des Kalkuls der Functionen sich eigentlich um ihn drehen muſs. Inzwischen ist es hier doch nöthig, einige Bemerkungen über die beiden ersteren Lehrsätze vorangehen zu lassen.

α) Der Satz Num. 1. kann aus einem zweifachen Gesichtspuncte betrachtet werden, entweder als berichtigend, oder als erläuternd. Im ersteren Fall würde er sagen: „der Erfinder des Differenzial-Kalkuls hat nicht die wahren Principien dieser Wissenschaft gekannt, denn sonst hätte er seine Functionen in Reihen von der Form $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots\ldots$ entwickeln müssen;" im letztern Fall aber: „um die der leibnitzischen Differenzial-Rechnung zum Grunde liegenden Principien zu verstehen, muſs man sich jede Function als eine Reihe von der genannten Form vorstellen." Bei dem aufmerksameren Durchlesen dieser lagrangeschen Schrift, läſst sich kaum bezweifeln, ihr Verfasser habe den ersteren Sinn in den Satz Num. 1. hineinlegen wollen; denn es heiſst §. 6.: „die verschiedene Art, die Principien der Differenzial-Rechnung zu begründen und darzustellen, wie auch diesen Kalkul zu benennen, zeigt daſs man seine wahre Theorie noch nicht gefunden hat." Ferner sagt der Verfasser im §. 7.: Mr. Arbogast ist in einer treflichen Abhandlung auf dieselbe Idee von Entwickelung der Functionen in Reihen gekommen. Da er aber noch nicht für gut gefunden hat, sie herauszugeben, und ich eine besondere Veranlassung hatte, die allgemeinen Principien der Analysis zu entwickeln: so kehrte ich zu meinen ehemaligen Ideen über die Principien der Differenzial-Rechnung zurück, und stellte neue Betrachtungen an, um sie zu begründen, und zu verallgemeinern." Endlich lautet der Anfang des §. 8. sehr unzweideutig also: „übrigens kann es befremden, daſs diese Ansicht der Differenzial-Rechnung sich nicht schon früher den Geometern dargeboten hat, und besonders daſs sie Newton dem Erfinder von den Methoden der Reihen entgangen ist" u. s. w. Hienach leidet es keinen Zweifel, daſs der Satz Num. 1. nur auf die erstere Art gedeutet werden müsse. Wie hätte auch Lagrange sonst die Benennung der Differenzial-Rechnung anstöſsig, oder doch der Sache nicht voll-

kommen gemäſs finden können? Indessen hält es nicht schwer sich davon zu überzeugen, daſs alle diese tadelnden Aeusserungen bloſse Vorurtheile sind. Wenn es dem französischen Gelehrten beliebt hätte, tiefer als bis in den algorithmischen Mechanismus der Differenzial-Rechnung einzudringen: so würde er gefunden haben, daſs seine gegenwärtige Functionen-Theorie keine Verbesserung, sondern bloſs eine Erläuterung von jener genannt werden, und eben darum der obige Satz Num. 1. nur den zweiten Sinn haben müsse. Denn wie die Theorie der analytischen Functionen gegenwärtig voraussetzt, daſs jede Function in eine Reihe aufgelöset werden könne, so begriff und überzeugte sich Leibnitz ganz vollkommen, daſs jede veränderliche Gröſse als eine Reihe angesehen werden müsse. Dies ist der Schlüssel zum Verständnisse der ganzen Differenzial-Rechnung; und wer ihren eigentlichen Sinn nicht verfehlen, oder über ihre Natur nicht unvorbereitet urtheilen will, dem muſs jene Grundvorstellung vorher ganz klar geworden seyn. Die leibnitzischen Reihen weichen von den neuern bloſs in Hinsicht der allgemeinen Form ab; denn sie sind da in einer solchen, aber anstatt die heutige schulgerechte $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots\ldots$ zu haben, erscheinen sie, z. B. in dem Commerc. philos. et mathem. Tom. I. pag. 21. u. ff. in der ganz einfachen Gestalt: a, b, c, d etc. Iedoch werden sie sogleich von ihren ersten, zweiten und folgenden Differenz-Reihen begleitet, um auf ihren Zusammenhang mit der objectiven Gröſsen-Welt hinzudeuten. Denn es ist doch wohl unter allen Fragen, die man an den Mechanismus der Zahlen- oder Buchstaben-Rechnung richten kann, keine der unwichtigsten: wie werden die Formen dieser Combinationen, Gesetze für die Erscheinungen in der objectiven Natur, wenn ich aus den Zeilen todter Zahlen und Buchstaben hinaus gehe? —— Die nähere Bekanntschaft mit den leibnitzischen Reihen setzt uns bald in den Stand, dies Räthsel zu lösen. Aber thut nun auch die Theorie der analytischen Functionen dasselbe, indem sie Namen und Princip des leibnitzischen Kalkuls ohne seine gehörige Ergründung verwirft? —— In der That, es findet sich in der ganzen berichtigenden Schrift nichts von dieser tiefer gehenden Belehrung. Anstatt ihrer ordnet sie uns ihre Functionen in primitive und derivirte; aber diesen Unterschied kannte die Differenzial-Rechnung bei ihrem Entstehen auch schon, denn bei ihr heiſst, wie unter andern in Leibn. op. omn. Tom. III. pag. 16. Num. IV., das erste

Glied der Hauptreihe Terminus generans, und jedes der nachfolgenden ein Terminus generatus. Die Theorie der analytischen Functionen hat ihre Prime (Erste Function, nach der grüsonschen Uebersetzung) Secunde (Zweite Function) Terzie (Dritte Function) u. s. w. Diesen gegenüber stehen im Differenzial-Kalkul die Differentiae generatrices, welche die ersten Glieder in jeder Differenzen-Reihe sind. Also zeigt sich hier eine Generatrix Prima, Secunda, Tertia etc. *) und es ist erweislich genug, dafs diese mit den lagrangeschen Primen, Secunden, Terzien u. s. f. ganz einerlei sind. Aber hiebei ist wohl manchem Leser schon aufgefallen, dafs der Kalkul der Functionen, in Hinsicht des Gebrauchs der Prime, Secunde, Terzie u. s. w. die Differenzial-Rechnung lediglich nachahmt. Es hätte wegen der Blöfsen dieser letztern (vergl. Th. d. a. F. §. 14.) mit zur Berichtigung ihrer Principien gehört, eine klare Einsicht in die Ursachen zu verschaffen, warum bei der Rechnung mit veränderlichen Gröfsen, in sehr vielen Fällen nur die Prime anstatt der primitiven Function, in andern aber die Secunde anstatt der Prime, in noch andern die Terzie anstatt der Secunde u. s. w. gebraucht werden mufs, um richtige Resultate zu erhalten. Fast jede andere Methode hat sich diese Frage aufgeworfen, und so gut wie es anging zu beantworten gesucht: daher das Verhältnifs 1:1 bei Newton und Mac Laurin, das Differenzial-Verhältnifs $\frac{\partial y}{\partial x}$ in der Theorie der Gränzen, der Verschwindungs-Quotient, das Nullen-Verhältnifs u. s. f. bei der künstlichen Nullen-Rechnung. Aber der Kalkul der Functionen schränkt sich blofs auf einen algorithmischen Mechanismus ein, und umgeht jede Erörterung der obigen Frage. Wenigstens hätte irgend ein Lehrsatz oder irgend eine Regel über die verschiedene Rechnungsfähigkeit der abgeleiteten Functionen und ihren jedesmaligen Gebrauch vorkommen sollen. Der Lehrsatz hätte z. B. so lauten können: „Es darf keine veränderliche Gröfse oder Function derselben unmittelbar (d. h. in ihrer primitiven Gestalt) in den Kalkul genommen werden"; und um des Beweises überhoben zu seyn, der sich hier nicht rein mechanisch führen läfst, hätte man ihn einen willkührlichen Satz oder eine Regel nennen mögen. Aehnliche Regeln hätten dann auch etwas über den Gebrauch der Se-

*) A. a. O. S. 331. heifst die generatrix prima, Infinitesima Prima, die generatrix secunda, Infinitesima Secunda u. s. w.

cunde anstatt der Prime, der Terzie anstatt beider vorhergehenden abgeleiteten Functionen u. s. w. festsetzen müssen. Der obige Lehrsatz (mag er einmal so heissen) wird von dem Functionen-Kalkul stillschweigend vorausgesetzt, eben darum, weil er nie die primitive Function selbst in Rechnung zieht. Die übrigen Regeln mögen wer weiſs wie heiſsen. Indessen da so wenig sie, als der vorhergehende Lehrsatz mit seinem Beweise vorhanden sind: so muſs nun dieser Kalkul sich gefallen lassen, daſs die Differenzial-Rechnung ihm den Vorwurf der Blöſse (aus seinem §. 14.) wieder zurückgiebt.

β) Soll der taylorsche Satz als das Hauptprincip des Differenzial-Kalkuls angesehen werden, so kommt es natürlich auf einen hinreichenden Ueberzeugungs-Grund an. Diesen ist aber die Theorie der analytischen Functionen hier nicht allein schuldig geblieben, sondern auch ausser Stande zu geben. Denn Erstlich, obgleich nicht eingeräumt werden kann, daſs die bekannte Reihe

$$y = Xx - \frac{x^2}{2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{x^3}{2.3}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{x^4}{2.3.4}\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \ldots\ldots$$

welche man die taylorsche nennt, deren eigentlicher Erfinder aber Johann Bernoulli ist*), mit folgender übereinstimme

$$y = x\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{x^4}{2.3.4}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots\ldots$$

welche Leibnitz bereits im Iahr 1694 aus seiner allgemeinen Reihe

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d\ldots. \\ e & f & g & h\ldots. \\ l & m & n & o\ldots. \end{array}$$

u. s. w. analytisch entwickelt hatte **): so liegt in beiden doch eine unverkennbare Aehnlichkeit, und man darf dem Erfinder dieser letztern wohl so viel Scharfsichtigkeit und Sinn für Gründlichkeit zutrauen, daſs er die taylorschen Formen (wenn sie so heissen sollen) die ihm hier sehr nahe lagen, würde festgehalten und als Hauptprincipien seinem Differenzial-Kalkul untergelegt haben, wenn er sich selbst bewuſst gewesen wäre, daſs er auf diesen letztern so blindlings, ohne vorhergehende Ergründung seiner Natur, gekommen sey, und ihn

*) Vergl. Joh. Bernoullis Werke, Th. 1. S. 125, Th. 2. S. 488. und Traité de Calc. différ. par Charles Bossut T. 1. pag. 444, à Par. an V.

**) Commerc. philos. et mathem. Tom. I. pag. 21.

noch für weiter nichts, als für eine bequeme Rechenmaschine (méchanisme des operations) ansehen könne. Räumt man dies ein, so muſs der Differenzial-Kalkul schon ein begründendes Princip gehabt haben, und es kann unstreitig nicht der taylorsche Satz gewesen seyn. Fürs Zweite, wenn gleich eine gegenseitige Beziehung (Reciprocität) vorhanden ist, in welcher die Differenzial-Rechnung und der taylorsche Satz stehen, so geht aus ihr doch keinesweges die Nothwendigkeit hervor, daſs der letztere eher gedacht werden müsse, als die erstere. Man kann allerdings wohl sagen: eine Art von Differenzialformen gebe die taylorsche Reihe, und umgekehrt diese wiederum jene. Aber es ist etwas ganz anders, gegenseitige Beziehung dieser Formen, und wesentliche Abhängigkeit des ganzen Differenzial-Kalkuls von der taylorschen Reihe. Soll die letztere begründendes Princip seyn, so muſs bewiesen werden, daſs wenn dieses Princip als nicht vorhanden gedacht wird, auch der ganze Kalkul wegfalle. Wo hat nun die Theorie der analytischen Functionen diesen Beweis geführt? —— Fürs Dritte, der taylorsche Satz kann bloſs auf eine mechanische Weise die allgemeinern Differenzial-Ausdrücke, aber keinesweges Aufschlüsse über die Fragen geben, welche oben in Hinsicht der abgeleiteten Functionen und ihres algorithmischen Gebrauchs aufgestellt worden sind. Aus dieser Ursache kann der Kalkul der Functionen immer nur als ein algorithmischer Mechanismus (Mechanisme des operations) aber nie als eine Wissenschaft betrachtet werden: und so trifft der gegen den Differenzial-Kalkul ausgesprochene Tadel ihn selbst wieder.

§. 24.

Bei der Auflösung der Functionen in Reihen begnügt man sich mehrentheils mit den ersten Gliedern, besonders wenn sie von der Art sind, daſs das Gesetz der Fortschreitung sehr bald aus ihnen erkannt wird. Ein solches Verfahren beobachtend, würde der Kalkul der Functionen seine Reihen an irgend einem beliebigen Gliede abbrechen können, ohne gehalten zu seyn, vollständige Gleichungen in den Kalkul zu bringen. Wenn z. B. $f(x+i)=(x+i)^6$ gesetzt werden sollte, so müſste die vollständige Gleichung seyn:

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''x+\frac{i^4}{2.3.4}f^{\mathrm{IV}}x+\frac{i^5}{2.3.4.5}f^{\mathrm{V}}x+\frac{i^6}{2.3.4.5.6}f^{\mathrm{VI}}x.$$

Anstatt dieser kann man die Reihe, deren Gesetz vollkommen bestimmt ist, willkührlich abbrechen, und die bekannte Folge durch ein etc. andeuten. An

dieser Verstümmelung der Gleichung wird niemand einen Anstoſs nehmen, sobald er nur die ersten Begriffe von der Verwandelung der Functionen in Reihen inne hat. Bis hieher würde nun jeder Einwand gegen das Verfahren des Functionen-Kalkuls, daſs er nur einige wenige Glieder aus der Reihe in Rechnung nimmt, ganz nichtig seyn. Wenn aber in folgenden allgemeinen Reihen

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$$

$$if'x + i^2 f''x + \frac{i^3}{2} f'''x + \text{etc.}$$

$$i^2 f'x + i^3 f'''x + \frac{i^4}{2} f^{\text{IV}}x + \text{etc.}$$

nicht nur das erste, sondern auch jedes nach dem zweiten folgende Glied weggeworfen wird: so entsteht natürlich die Frage, welche arithmetischen Gründe zu diesem Verfahren berechtigen. Will man hier nicht eingestehen, daſs der Functionen-Kalkul die Differenzial-Rechnung bloſs nachahmt: so verdient es Tadel, daſs für das Wegwerfen des ersten Gliedes in der entwickelten Reihe keine Gründe angegeben werden. Oder muſs man einräumen, daſs der Abzug der fx von $fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$ der alleinige Grund sey, warum das erste Glied aus der Reihe wegfalle: so ist ja offenbar $if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$ eine Differenz; und wie kann dieser neue Derivations-Kalkul sich von dem gemiſsbilligten Namen einer Differenzen-Rechnung lossagen? —— Was das Wegwerfen der Glieder nach dem zweiten betrifft, so läſst sich, trotz des obigen dritten Lehrsatzes oder Fundamentalsatzes, ganz und gar kein nothwendiges Gesetz des Kalkuls dafür nachweisen, sondern es herrscht bloſse Willkühr, wenn gleich der Kalkul der Functionen sich stellt, als wäre ein förmlicher Zwang vorhanden, die Reihe rückwärts bis an das zweite Glied abzubrechen. Denn sein Fundamentalsatz berechtigt höchstens zu der Behauptung: „Es ist wohl kein Fehler, wenn man etliche Glieder in der Reihe wegläſst; weil die Gröſse i jederzeit so klein genommen werden kann, daſs jedes vorhergehende Glied grösser ist, als die Summe aller nachfolgenden.“ Zugegeben daſs grade darum etliche Glieder vernachläſsigt werden dürfen: so führt diese Erlaubniſs durchaus nicht den Zwang herbei, daſs die Vernachläſsigung sich jedesmal bis an

das zweite Glied der Reihe erstrecken müsse. Vielmehr liegt in der Beschaffenheit des Restes, wenn er nämlich aus dem Gesichtspuncte der Theorie der Reihen betrachtet wird, eine Auffoderung, nach dem zweiten so viele Glieder als möglich beizubehalten. Denn die abgebrochene Reihe ist hier ein blosser Annäherungs-Ausdruck; und die Annäherung muſs desto gröſser seyn, je weniger Glieder vernachlässigt werden. Es ist also gar nicht einzusehen, daſs der Kalkul der Functionen aus seinem Fundamentalsatze einen Grund hernehmen könnte, von der jedesmaligen Reihe nur das zweite Glied, und ausser diesem nichts weiter beizubehalten. Eben darum würde dieser Satz in die Differenzial-Rechnung übergetragen keine sonderlichen Dienste leisten, oder gar Blöſsen decken; denn man bleibt unter seinem Geleit immer in Ungewiſsheit, ob und wie viele Glieder der Reihe man mit Recht wegwerfen dürfe. Ueberdies kommt es nun auf die Frage an: wie groſs oder wie klein muſs die unbestimmte Gröſse i genommen werden? Die Bedingung des Kalkuls der Functionen ist, sie so klein zu setzen, daſs jedes Glied gröſser wird, als die Summe aller nachfolgenden. Man sieht sofort ein, daſs i ein Bruch, und wenn gleich nicht in allen, doch in denjenigen Functionen, die nicht gebrochen sind, und keine groſsen Factoren mit negativen Exponenten enthalten, ein sehr kleiner Bruch seyn müsse. Durch diese Bedingung aber wird der Unterschied zwischen dem Kalkul der Functionen und der Differenzial-Rechnung, aus dem lagrangeschen Gesichtspuncte betrachtet, noch unstätiger; denn angenommen, daſs in dem leibnitzischen Infinitesimal-Kalkul, das heiſst in der Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Geometrie, unter der Vernachlässigung einiger Glieder „ob incomparabilitatem" nicht Mangel an Vergleichungsfähigkeit, sondern Mangel an Gröſse, das heiſst Kleinheit zu verstehen sey: so hat ja der Kalkul der Functionen, zufolge seines Fundamentalsatzes, keinen andern Grund der Vernachlässigung, als grade diese Kleinheit. Uebrigens muſs hier vorläufig bemerkt werden, daſs die Differenzial-Rechnung eben so wenig, als der Functionen-Kalkul genöthigt ist, sogenannte unendlich-kleine Gröſsen in Rechnung zu nehmen.

Stellen wir jetzt eine Vergleichung zwischen beiden Rechnungsarten an, so muſs die neuere wie die ältere Differenzen gebrauchen; jene wie diese einerlei Entwickelungs-Methode der Differenzen höherer Ordnung befolgen; die erstere

wie die letztere einige Glieder dieser Differenzen vernachlässigen, und jede von beiden, wenigstens Kürze halber, die Veränderungs-Grössen i oder ∂x u. dgl. sehr klein annehmen. Hier findet gar kein wesentlicher Unterschied Statt, wenn gleich in dieser oder jener Nebensache etwas Abweichendes vorhanden ist. Ueberdies leuchtet es klar genug ein, dass der Fundamentalsatz des neuern Kalkuls gar nicht geeignet ist, die Zweifel und Einwürfe in Hinsicht der Vernachlässigung aller Glieder in der Reihe ausser dem zweiten zu heben. Hieraus läst sich denn die Folge ziehen: giebt die Differenzial-Rechnung Blössen, so muss es die Theorie der analytischen Functionen auch; beruhet jene auf irrigen Voraussetzungen, so theilt diese solche mit ihr.

§. 25.

Noch ist zu untersuchen, ob die lagrangesche Theorie den Begriff des Unendlich-Kleinen, oder auch nur des leibnitzischen „indefinite parvi" (d. h. unbestimmt Kleinen, vergl. Leibn. Op. omn. Tom. III., pag. 193 u. a. O.) welches dort im §. 4. difference indéfinie*) genannt wird, überall vermeiden könne. Dieses indefinite parvum scheint, nach der gewöhnlichen Ansicht des Differenzial-Kalkuls, unter andern bei der Differenziation der trigonometrischen Functionen, und namentlich des Sinus eines veränderlichen Bogens, durchaus etwas Unendlich-Kleines, oder eine Differenz $= 0$ seyn zu müssen, damit ein Cosinus $= 1$ zum Vorschein kommen könne. Das führt aber zu einem offenbaren Widerspruch; denn eine Differenz $= 0$ ist keine Differenz, und gleichwohl wird eine wirkliche Zu- oder Abnahme des Bogens erfodert, weil er ohne diese aufhören würde sich zu verändern. Um hier den Widerspruch zu vermeiden sieht man sich genöthigt, einen Cosinus $= 1$ zu setzen, der nicht im strengsten Sinne, sondern bloss beinahe $= 1$ ist. Wie weicht nun der Kalkul der Functionen dieser Klippe aus? —— Er entwickelt nach einer bekannten Methode in seinem §. 25. ein Paar Reihen für den Sinus und Cosinus, in welchen diese trigonometrischen Linien durch ihre Bogen ausgedrückt sind, nämlich

$$\sin x = Ax - A^3 \frac{x^3}{2 \cdot 3} + A^5 \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc. und}$$

$$\cos x = 1 - A^2 \frac{x^2}{2} + A^4 \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

*) Dies hätte in der grüsonschen Uebersetzung durch unbestimmte nicht aber durch „unbegränzte" Differenz gegeben werden sollen.

Mit Hülfe des archimedischen Grundsatzes, daſs der Sinus kleiner und die Tangente gröſser, als der zwischenliegende Bogen sey, wird für $x = \frac{\sqrt{6}}{A}$ oder auch für jedes noch kleinere x erwiesen, daſs in Beziehung auf die Kreislinie der Coefficient $A = 1$ seyn müsse. Daher

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc. und}$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

Nach der Analogie hat man eben so

$$\sin i = i - \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^5}{2.3.4.5} - \text{etc. und}$$

$$\cos i = 1 - \tfrac{1}{2}i^2 + \frac{i^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

Wird nun in der allgemeinen Reihe $f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \text{etc.}$ $\sin x$ anstatt fx gesetzt, so giebt der dortige §. 29. $\sin(x+i) = \sin x \cos i + \cos x \sin i$, und wenn einerseits $\sin i$ nebst $\cos i$ mit den vorhergehenden Werthen, andererseits die unnützen Glieder dieser letztern mit einem schicklichen Et-Cetera vertauscht werden, den Ausdruck:

$$\sin(x+i) = \sin x\,(1 - \text{etc.}) + \cos x\,(i - \text{etc.}) = \sin x + i \cos x,$$

also wenn das erste Glied durch Abzug wegfällt, $\sin(x+i) - \sin x = i . \cos x$, welches in die Sprache der Differenzial-Rechnung übersetzt $\partial(\sin x) = \cos x . \partial x$ ist.

Beurtheilt man diese Entwickelungs-Art der Function $i \cos x$ ganz unpartheiisch, so ist es nicht möglich, ihr in Vergleichung mit der im Differenzial-Kalkul gebräuchlichen einen Vorzug einzuräumen. Denn angenommen, daſs die Vernachlässigung aller ausser dem Gliede $\cos x . \partial x$ vorhandenen Differenzentheile sich bloſs durch die Kleinheit des ∂x rechtfertigen lasse, so hat die Theorie der analytischen Functionen in der That keinen andern Grund, um es gut zu heissen, daſs sie bloſs ihr $i \cos x$ zurückbehält. Uebrigens mögen die obigen Reihen für $\sin i$ und $\cos i$ auch noch so schnell convergiren, es kann sich weder $\frac{1}{2}i^2$ noch irgend eine höhere Potenz von i dem Werthe Null möglichst nähern, wenn nicht dieser Binomial-Theil unermeſslich- oder unendlich-klein genommen wird. Eine Bedingung, welche bei einigen Aufgaben aus der Geometrie

grade so unerlaſslich ist. Hieher gehört unter andern die Rectification der Curven, und die Bestimmung krummer Oberflächen konoidischer oder sphäroidischer Körper im §. 136 u. §. 137. der lagrangeschen Schrift. Sie geht hier von dem archimedischen Grundsatze aus, der Bogen sey länger als seine Sehne, aber kürzer, als beide Abschnitte der Tangenten (Polygonseiten) welche man an seine beiden Endpuncte zieht. Es wird also der Bogen zwischen zwei Gränzen eingeschlossen, welche die Functionen $i\varphi x$ und $i\varphi(x+i)$ sind. Um sich das Ansehen zu geben, als brauche hier der Binomial-Theil i nicht unermeſslich klein zu seyn, wird beiläufig die Erlaubniſs ertheilt, den letztern so klein zu nehmen, als man immer wolle. Das ist aber eine bloſse Redensart, und jeder Unbefangene sieht wohl ein, daſs hier nicht mehr Willkühr, sondern Zwang herrscht. Also abgesehen davon, daſs es noch in Zweifel gezogen werden muſs, ob der hier zum Grunde gelegte archimedische Satz ein wirklicher Grundsatz genannt werden dürfe, und nicht erst einen strengen Beweis erfodere *), so wird die Theorie der analytischen Functionen sich dennoch so wenig in diesem, als in andern Fällen, wo die Betrachtung der Figur (consideratio figuralis, wie es Leibnitz nannte) ihr Zwang auferlegt, von dem Gebrauch des sogenannten Unendlich-Kleinen ganz lossagen können. Denn wenn gleich ihr Fundamentalsatz die Vernachlässigung einiger Glieder gutheissen darf, so kann er doch fürs Erste sie niemals berechtigen, eine bestimmte Anzahl wegzuwerfen, wenn sie nicht zugleich um anderer Bedingungen willen, nämlich wegen der ausserordentlichen Kleinheit u. s. w., von selbst wegfallen: fürs Zweite kann er noch weniger vorschreiben, das i nicht kleiner als diese oder jene willkührliche Gröſse, z. B. nicht kleiner als eine Bogenminute, Bogensecunde u. dgl. zu denken, damit das Unendlich-Kleine vermieden werde; denn hiebei kommt es nicht auf den Fundamentalsatz an, sondern auf die Bedingungen, welche die zu betrachtende Figur und irgend ein bei ihr zum Grunde liegender geometrischer Satz mit sich führt. Dies alles lehret uns, daſs der Kalkul der Functionen hier gar nicht besser dran sey, als die Differenzial-Rechnung. Aber welches Recht hat nun jener zu behaupten, daſs diese wegen des

*) Vergl. Sehr leichte und kurze Entwick. einiger mathem. Theorien von J. Schulz, 1805. S. 224; ingleichen Anfangsgründe der Differenzialrechn. nach Lagrange's Theor. de fonct. analyt. von Rohde, 1798. Vorrede S. VI.

Gebrauchs ihres „indefinite parvi“ in Irrthümern stecke, da er doch selbst es nicht vermeiden kann, in dieselben Irrthümer hinein zu gerathen? —— Ist nicht eben darum die angebliche Verbesserung der Differenzen-Methode eine bloſse Anmaſsung? —— War die Differenzial-Rechnung wirklich einer Verbesserung benöthigt, weil ihre Principien Irrthümer seyn sollen: so muſste der Anfang damit gemacht werden, daſs man untersuchte, ob nicht jede leibnitzische Differenzial-Formel an sich falsch, und ein Ding sey, was zu nichts führe? Denn die Principien des Differenzial-Kalkuls sind seine Grundbegriffe, und seine Formeln Schlüsse aus diesen, als ihren Vordersätzen. Es ist aber logisch unmöglich, aus irrigen Voraussetzungen gradezu wahre Schluſsfolgen zu ziehen. Eben darum hätte Formel für Formel, nach den allgemeinsten Grundbegriffen einer Rechnung mit veränderlichen Gröſsen, erst geprüft, und hierauf der bessere analytische Weg gezeigt werden müssen, welcher zu den richtig befundenen leibnitzischen Ausdrücken hinführt, ohne in die (angeblichen) leibnitzischen Irrthümer zu stürzen. Wollte man sagen, diese Formeln müſsten schon deshalb für gültig und wahr gehalten werden; weil die neuere Theorie durch ihren Mechanismus der Operation ganz dieselben hervorbringe: so läſst sich gegen diesen Erweis der Rechtmäſsigkeit noch Manches einwenden. Fürs Erste, warum behält dieser neue französische Kalkul in seinem Mechanismus den Abzug der ursprünglichen Function von der binomisch veränderten bei, wodurch er sich dem Tadel aussetzt, daſs er die Benennung der Differenzial-Rechnung als unschicklich verwerfe, und gleichwohl selber nichts anders, als eine Differenzen-Rechnung sey? Angenommen, daſs die neue Theorie von diesem Verfahren keinen Gebrauch gemacht, und fürs Zweite auch eine ganz andere, wo möglich noch viel allgemeinere Form ihrer Hauptreihe, z. B. $fx = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} +$ u. s. w. gewählt hätte: würde unter diesen veränderten Bedingungen dennoch dieselbe einmal vorhandene Gestalt der abgeleiteten Functionen oder Differenzial-Formeln zum Vorschein gekommen seyn? —— Die Unmöglichkeit irgend einer Abweichung fällt hier nicht von selbst in die Augen: daher wäre es äusserst verdienstlich gewesen, einen Beweis für sie zu geben; denn jetzt hätte man überzeugend eingesehen, daſs in dem Functionen-Kalkul nichts Gesuchtes (Nachgeahmtes) liege, und so wäre dann für immer entschieden gewesen: es gebe nur diese eine richtige Art mit veränderlichen Gröſsen zu rechnen.

Da es aber der neuern Theorie nicht gefallen hat, sich auf diese wichtige Untersuchung einzulassen: so ist sie eben darum viele und grofse Anfoderungen schuldig geblieben. Doch sie wollte zufolge ihres §. 9. einen Kalkul erfinden, dessen Principien frei von aller Erdichtung und Metaphysik seyn sollten. Mit Erdichtungen können die Principien einer mathematischen Analysis allerdings nicht bestehen; wohl aber vertragen sie sich mit philosophischen Reflexionen, die noch grade nicht der mechanische Kalkul selbst sind. Vielleicht verschmähete die Theorie der analytischen Functionen auch diese letztern, um weiter nichts, als rein mechanischer Algorithmus zu seyn. Wenn das ist, so wird ihr freilich das Prädikat eines Meisterwerks von dieser Art niemand streitig machen. Aber eben so gewifs darf hoffentlich auch die ältere Theorie der Differenzial-Rechnung sich dieses Lob aneignen, man mag sie von Seiten ihres Mechanismus oder ihrer philosophischen Begründung betrachten.

Zweite Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Darstellung der allgemeinen Differenzial-Rechnung, gegründet auf des deutschen Erfinders eigene Erklärungen.

§. 26.

Alle Vergleichung der Gröfsen, sie mögen ununterbrochen zusammenhängende (continuirliche) oder vereinzelte (discrete), feste oder flüssige, wägbare oder unwägbare, ruhende oder bewegte, beständige oder veränderliche u. s w. seyn, fängt mit dem Verhältnisse an. Dieses letztere hat bekanntlich zweierlei Formen, die sogenannte arithmetische und geometrische. Wo nicht eine von beiden Statt findet, da hört auch jede messende*) Vergleichung auf, so dafs die Gränzen der Verhältnisse zugleich die Gränzen des ganzen Gebiets der Gröfsenlehre sind. Wer hieran zweifeln wollte, der dürfte nur einen Blick auf das unbauliche Feld einer mathesis intensorum werfen, und jeder Zweifel würde gehoben seyn. Alle Naturgesetze in der sich mischenden und entmischenden, in der organisirten und unorganisirten Körperwelt, lassen sich auf Verhältnisse zurückführen; und will man jene finden, so müssen diese vorher gesucht werden. Verstattet uns der physisch erfüllte Raum, so wenig er auch an sich betrachtet eine todte Zahl oder Zahlen-Schichtung seyn mag, nur auf irgend eine Art eine Vergleichung in Verhältnissen: so unterwirft er sich eben dadurch den Gesetzen der Zahlenlehre; diese schreibt ihm Veränderungen vor, die er befolgen mufs, oder sieht seine Erscheinungen, als wären sie Erzeugnisse ihrer Berechnungen, in weit entfernter Zukunft voraus. Hierin gründet sich die Möglichkeit, dafs die arithmetischen Formen und Wechselverbindungen Gesetze für

*) Anmerkung. Die Sprachlehre hat zwar auch ihre Vergleichungs-Stufen; sie sind aber nie durch Zahl bestimmt, also nie messend.

die Aussenwelt werden müssen; denn sobald uns diese Verhältnisse darbietet, sind Proportionen und Gleichungen ein nothwendiger Erfolg von jenen, und die Gröſsenbeziehungen in der objectiven Natur, werden mit den Gröſsen-Beziehungen der Arithmetik Eins.

§. 27.

Alle Verhältnisse, man mag sie arithmetisch oder geometrisch nennen, zerfallen in zweierlei Arten, in beständige oder stehende, und unbeständige oder veränderliche (flieſsende, fluxions). Mit den letzteren läſst sich nicht eher so wie mit beständigen rechnen, als bis sie stehend gemacht (fixirt) worden sind. Eine schwierige Aufgabe, zu welcher die ältern Mathematiker, vor der vollkommenern Theorie der Reihen, zwar vorgearbeitet, aber sie nicht gelöset haben. Das Bedürfniſs dieser Umwandelung veränderlicher Verhältnisse für die Dauer der anzustellenden Rechnung selbst, haben alle denkenden Mathematiker deutlich gefühlt; denn man hat sich Mühe gegeben, hier auf etwas Stehendes zu kommen. Am deutlichsten finden wir dies ausgesprochen bei den berühmten Analysten gegen das Ende des 17ten und im Anfange des 18ten Jahrhunderts. Darum ersann Jsaac Newton sein Verhältniſs 1 : 1, von welchem oben erwiesen worden ist, daſs es durchaus nicht überall Statt finden und allgemein stellvertretend seyn kann. Dieselbe Absicht haben spätere Versuche, namentlich in der Theorie der Gränz-Verhältnisse und in der künstlichen Nullen-Rechnung gehabt. Ein Beweis, daſs man bei tieferem Nachforschen immer auf denselben Punct hingekommen ist, von welchem der Differenzial-Kalkul ausging, und daſs dieser nie miſszuverstehen oder gar für Irrthum anzusehen gewesen seyn würde, hätte man seines Erfinders Vorstellung von einer veränderlichen Gröſse richtig aufgefaſst.

§. 28.

Sollen Rechnungsformen einem Gegenstande in der äuſsern Gröſsenwelt entsprechen: so ist eine gewisse Uebereinstimmung oder Gleichförmigkeit nöthig zwischen den arithmetisch abgezogenen Gröſsen und demjenigen, worauf sie sich beziehen, wenn dies letztere selbst als Zahl betrachtet wird. Daher müssen bei beständigen Verhältnissen auch die Verhältniſs-Glieder den bezeichneten Gröſsen proportional seyn. Wenn z. B. für die Berechnung einer gleichförmigen Bewegung das Zahlenverhältniſs der Zeit = 1 : 3 genommen wird: so muſs

die wirklich verflossene Zeit ebenfalls das Dreifache von der Zeiteinheit seyn; denn sonst würde der wirklich durchlaufene Raum nicht dem Dreifachen der Raumeinheit (Geschwindigkeit) gleich kommen. Aber wie hier Gleichförmigkeit der bezeichneten und bezeichnenden Verhältniſs-Glieder erfodert wird, so muſs dieselbe auch bei den Gliedern veränderlicher Verhältnisse Statt finden. Hierauf bezieht sich die merkwürdige Stelle in den Actis Erud. Lips. 1684, pag. 467 seq. „Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum consideranti: ipsas ∂x, ∂y..... ut ipsarum x, y....... (cujusque in sua serie) differentiis seu incrementis et decrementis momentaneis proportionales haberi posse." Es ist also nicht erlaubt, für die bezeichnenden Gröſsen ganz willkührliche Zahlenformen zu gebrauchen; denn wo die vorhin erwähnte Gleichförmigkeit fehlt, da läſst sich vernünftigerweise keine Uebereinstimmung der Rechnung mit dem berechneten Gegenstande erwarten. Es würde z. B. höchst widersinnig seyn, die Summe einer arithmetischen Reihe vom ersten Range, für den Kubikinhalt einer Pyramide ansehen zu wollen, da doch dieser Körper eine arithmetische Reihe vom zweiten Range bildet. Eben darum hat man auch überall die Uebereinstimmung der Natur einer veränderlichen Gröſse in der physischen Körperwelt mit der reinen Zahlenform zu berücksichtigen; weil ohne diese Uebereinstimmung unmöglich die letztere für jene gesetzlich oder folgegebend seyn kann. Wer z. B. eine arithmetische Reihe vom ersten Range, die t Glieder hat, summirt, um die Fallhöhe eines Körpers in der widerstehenden atmosphärischen Luft für t Zeiteinheiten zu bestimmen, der begeht eine Inconsequenz, indem er die freie beschleunigte Bewegung mit der gehinderten verwechselt, und in seiner Berechnung eine arithmetische Form unterschiebt, welche mit der zu berechnenden Gröſse keine Aehnlichkeit hat, oder wo nicht Glied für Glied und Zuwachs für Zuwachs in dem Bezeichnenden und Bezeichneten proportional ist. Mag man hieraus die Wichtigkeit der vorhin angeführten Stelle erkennen, und einsehen lernen, daſs zur Begründung einer Rechnung mit veränderlichen Gröſsen mehr nöthig ist, als eine Menge arithmetischer Formen zu erfinden, die zwar unter sich von einander abhängig sind, aber auch auf nichts ausser sich eine nothwendige oder evident erweisliche Beziehung haben. Es war vor dem Daseyn des Differenzial-Kalkuls keine kleine Aufgabe, was für eine arithmetische Gestalt man den veränderlichen Gröſsen geben müsse, um die unentbehr-

liche Proportionalität zwischen dem Bezeichneten und Bezeichnenden überall festhalten zu können.

§. 29.

Der Differenzial-Kalkul stellt seine veränderlichen Gröſsen unter der Gestalt arithmetischer und geometrischer Reihen dar. „Ego incepi calculum differentialem a numerorum seriebus“..... sagt Leibnitz im Comm. philos. et mathem. Tom. I. pag. 380., wo er zugleich einen höchst merkwürdigen Unterschied zwischen seinem Calculo generali und speciali, scil. geometrico seu infinitesimali andeutet. Die beiden Hauptreihen sind, wenn p die anfängliche Differenz und q den anfänglichen Verhältniſs-Exponenten bezeichnet, im Allgemeinen folgende:

$$\text{I.}\quad x,\ x+p,\ x+mp,\ x+m'p,\ x+m''p\ \ldots\ldots$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} a^x,\ a^x q,\ a^x q',\ a^x q'',\ a^x q''',\ a^x q^{\text{IV}}\ \ldots\ldots \\ y^x,\ \overset{\prime}{y}{}^x q,\ \overset{\prime\prime}{y}{}^x q',\ \overset{\prime\prime\prime}{y}{}^x q'',\ \overset{\text{IV}}{y}{}^x q''',\ \overset{\text{V}}{y}{}^x q^{\text{IV}}\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Aus ihnen gehen noch zwei Nebenreihen hervor, die bekannte Binomial-Reihe, wenn jedes Glied der ersten auf eine beliebige Potenz n erhoben wird, und eine logarithmische Reihe, wenn man entweder x oder a^x oder y^x u. dgl. als den veränderlichen Logarithm einer veränderlichen Gröſse betrachtet. Für den Fall, daſs x einen veränderlichen Kreisbogen bezeichnet, bleibt die Reihe unter I. gültig, und man hat nacheinander die trigonometrischen Functionen:

$$\sin x,\ \sin(x+p),\ \sin(x+mp),\ \sin(x+m'p)\ \ldots\ldots$$

$$\cos x,\ \cos(x+p),\ \cos(x+mp),\ \cos(x+m'p)\ \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tang} x,\ \operatorname{tang}(x+p),\ \operatorname{tang}(x+mp),\ \operatorname{tang}(x+m'p)\ \text{u. s. w.}$$

Hier muſs nun gleich bemerkt werden, daſs alle Miſsverständnisse in Hinsicht der Grundbegriffe des Differenzial-Kalkuls, lediglich aus der Nichtbeachtung derjenigen Glieder in den beiden Hauptreihen entstanden sind, welche auf das zweite folgen. Es ist daher nöthig, mehr als zwei Glieder in Betrachtung zu ziehen, so oft es darauf ankommt, die Natur dieses Kalkuls auseinander zu setzen, und sich die Ueberzeugung zu verschaffen, daſs er so wenig das Werk eines glücklichen Zufalls, als das Erzeugniſs von Irrthümern, sondern bis in seine letzten Elemente völlig durchdacht sey. Wie aber, wird man fragen, hat Leibnitz alle Veränderungen objectiver Gröſsen in der Gestalt theils einer arithmetischen, theils einer geometrischen Reihe darstellen dürfen? Wie konnte er er-

warten, daſs einerseits diese beiden algorithmischen Formen alle Formen veränderlicher Gröſsen erschöpfen würden, und daſs andererseits bei der Anwendung dieser zwei Grundformen überall zwischen den bezeichneten und bezeichnenden Gröſsen die benöthigte Proportionalität oder Gleichförmigkeit bleiben müsse? — — Hierauf läſst sich antworten: die beiden leibnitzischen Hauptreihen sind darum so allgemein und gesetzgebend für die Aussenwelt, weil sie aus ihr unmittelbar hervorgehen. Denn wir können im Gebiete der angewandten Gröſsenlehre nie anders messend vergleichen, als mit Hülfe arithmetischer und geometrischer Verhältnisse. Nun giebt aber irgend eine regelmäſsige Folge von arithmetischen oder geometrischen Verhältniſs-Gliedern jederzeit eine Progression dieser Art. Eben darum schreibt die ganze Aussenwelt sich diese Form ihrer veränderlichen Gröſsen vor, und die beiden Hauptreihen der Differenzial-Rechnung, erhalten dadurch als bezeichnende Gröſsen eine Allgemeinheit. Wir dürfen in der That nicht weit suchen, um diese Reihen aufzufinden. So giebt der freie Fall der Körper die Reihe $1g$, $3g$, $5g$, $7g$ u. s. w., welches eine arithmetische Reihe vom ersten Range ist. Auch kann man sich leicht überzeugen, daſs der Differenzial-Kalkul, er mag auf Gegenstände der Physik und Mechanik, oder auf geometrische Figuren u. s. w. angewandt werden, überall mit denjenigen Veränderungs-Formen ausreicht, welche aus der obigen arithmetischen und geometrischen Reihe hervorgehen. Denn da keine von beiden in Hinsicht ihrer Glieder, und namentlich der Gröſsen m, p und q, an gewisse Schranken der Veränderung ihrer Werthe gebunden ist: so steht es frei, jede Hauptform sich unzähligemal abgeändert zu denken, und besonders bei der arithmetischen bis zu einem unendlichsten Range fortzugehen, um die jedesmalige Gestalt der Veränderung unbeständiger Gröſsen zu bezeichnen, wie mannichfaltig sie auch immer seyn mag. Welche Fülle ist hier mit der gröſsten Einfachheit gepaart!

§. 30.

Die vollständige Erkenntniſs der Gründe, auf welchen das ganze algorithmische Verfahren der Differenzial-Rechnung beruhet, hängt zu sehr von dem wahren Begriff einer veränderlichen Gröſse ab, als daſs es nicht nöthig seyn sollte, diesen letztern noch näher zu bestimmen. Da er aber nicht willkührlich seyn darf, so kann man hier von der Betrachtung einer veränderlichen Gröſse

ausgehen, wie sie in der Natur vorkommt. Es giebt unter andern die gleichförmig beschleunigte Bewegung im freien Mittel folgende arithmetische Reihe vom ersten Range:

$$g,\ g+2g,\ g+2.2g,\ g+3.2g,\ g+4.2g, \ldots\ g+(n-1)2g,$$

welche $2g$ zur beständigen Differenz hat. Diese Reihe ist so beschaffen, daſs für jeden einzelnen Zeittheil immer nur ein einziges Glied vorhanden, jedes vorhergehende gleichsam verschwunden, und keins der nachfolgenden mit dem eben gegenwärtigen schon gleichzeitig da ist. Wenn daher die beschleunigte Bewegung länger als eine einzige Zeiteinheit dauert, so kommt eine veränderliche Gröſse zum Vorschein. Diese besteht in jedem Zeittheile n, aus der Stammgröſse g und der $(n-1)$-fachen Differenz $2g$, die hier ein Increment genannt werden muſs. Die ganze Veränderung beruhet also darauf, daſs ein und dasselbe g von Zeiteinheit zu Zeiteinheit einen Zuwachs erhält. Bei einer der Richtung der Schwere grade entgegengesetzten Bewegung, würde diese $(n-1)$-fache Differenz eine Verminderung, also ein Decrement hervorbringen. Bildet man sich jetzt nach der Form dieser von der Natur gegebenen Reihe, eine ihr in der Bezeichnungsart des Differenzial-Kalkuls entsprechende, so hat sie folgende Gestalt:

$$x,\ x+\partial x,\ x+2\partial x,\ x+3\partial x,\ x+4\partial x, \ldots\ x+(n-1)\partial x$$

und es leuchtet ein, daſs wie x dem g, so ∂x dem $2g$ proportional bleibt. Uebrigens gilt hier, was bereits vorhin bemerkt wurde, daſs fürs Erste in jedem einzelnen Zeittheile, so groſs oder klein er auch immer seyn mag, von der ganzen Reihe nichts mehr, als ein einziges Glied vorhanden ist; fürs Zweite, daſs x bloſs darum veränderlich ist, weil es mit jeder kleinern oder gröſsern Zeiteinheit einen neuen Zuwachs oder eine neue Abnahme leidet. Hält man diese Bedeutung der Veränderung nicht fest, so lassen sich bei der Erklärung des Mechanismus der Differenzial-Rechnung schwerlich alle Miſsverständnisse vermeiden. Man muſs aber wohl unterscheiden Veränderung und Veränderlichkeit einer unbeständigen Gröſse. Es giebt nämlich allerdings noch eine Veränderlichkeit, welche dem x nicht abgesprochen werden darf, und welche darin besteht, daſs ihm alle zwischen Null und Unendlich liegenden Werthe zukommen können. Aber wie in der Theorie der Functionen kein x verstattet wird, welches für die Dauer des besondern

Rechnungsfalles in jedem Gliede einen andern Werth hat, weil dies auf Widersprüche führen würde: so muſs auch hier das verschiedener Werthe zwar fähige x, indem es eine veränderliche Gröſse oder eine Reihe bildet, gleichwohl nur Einen Werth haben, der mehrere Zeiteinheiten hindurch derselbe bleibt. Denn die im Differenzial-Kalkul gemeinte Veränderung (nicht Veränderlichkeit) beruhet lediglich auf den momentanen Incrementen und Decrementen. Daſs die Sache sich in der That so verhalte, ist leicht einzusehen. Iedermann zieht beim Differenziiren das erste Glied der Reihe vom zweiten ab, unter der Voraussetzung, daſs x sich mit x oder x^n mit x^n aufhebt. Wie könnte dies angenommen werden, wenn x oder x^n bei dem Uebergange von dem ersten zum zweiten Zustande eine Veränderung erlitten hätte? Fände sie überhaupt Statt, so müſste sie bei keinem Paar aufeinander folgender Glieder ausbleiben. Nun ist aber ein Paar von Gliedern da, wo sie durchaus wegfällt: also kann sie auch überhaupt nicht zugelassen werden. Es ist hieraus leicht einzusehen, daſs im leibnitzischen Differenzial-Kalkul kein Increment ∂x, ∂y, ∂z u. dgl. an sich Null seyn darf; denn dadurch hört jede Gröſse x, y, z u. dgl. sofort auf, einer differenziellen Veränderung unterworfen zu seyn, wiewohl ihr dieselbe willkührliche Veränderlichkeit der Zahlenwerthe bleibt, welche in der Theorie der Functionen gebräuchlich ist. Hiedurch wird es auch vollkommen begreiflich, warum der Erfinder des Differenzial-Kalkuls es für durchaus unstatthaft halten muſste, seine Incremente und Decremente ∂x, ∂y, ∂z etc. für Nullen anzusehen. Hätten sie es, ausser einigen wenigen Fällen, z. B. in der Lehre vom Gröſsten und Kleinsten, seyn können: so wäre es eine höchst unnütze Spielerei gewesen, den Gröſsen x, y u. dgl. die Anhängsel ∂x, ∂y u. s. w. zu geben. Denn man hätte sich nun mit Reihen von der Gestalt $x, x, x \ldots\ldots$ oder $y, y, y \ldots\ldots$ u. s. w. behelfen, und bei den nach Art der Nullenrechnung geschriebenen Differenzialen $x - x$, $y - y$ u. dgl. bloſs an die Veränderlichkeit der Zahlenwerthe denken müssen, welches zwar eine Art von Functionen-Rechnung, aber ein höchst unbestimmter und unverständlicher Differenzial-Kalkul gewesen seyn würde. Denn wozu kann die Voraussetzung wohl führen, daſs in einer Reihe $x, x, x \ldots\ldots$ jedes nachfolgende oder der Zeit nach spätere Glied sich anders als das vorhergehende denken lasse, jedoch der differenzielle Unterschied $\partial x = x - x$ immerfort $= 0$ bleiben müsse? —— Ist das nicht der offenbarste Widerspruch, aus welchem sich nie-

mals irgend eine vernünftige Schlufsfolge ableiten und am allerwenigsten begreiflich machen läfst, warum die Rechnung mit veränderlichen Gröfsen sich der abgeleiteten Functionen anstatt der ursprünglichen bedient? —— Der Differenzial-Kalkul hat veränderliche (d. i. von Augenblick zu Augenblick sich wirklich verändernde) Gröfsen miteinander zu vergleichen, so wie sie in der äufsern Gröfsenwelt vorkommen. Darum ist ihm der Zwang auferlegt, arithmetische Formen zu suchen, welche nicht blofse Functionen-Reihen, sondern solche Reihen sind, wie sie die objective Natur bildet. Man darf nur einige wenige dieser ungleichartigen Reihen miteinander vergleichen, z. B.

$$\frac{1+x}{1-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots + Qx^{n-1},$$

$$\frac{1+x}{1-x}\text{ etc.} = \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+(x+\partial x)}{1-(x+\partial x)} + \frac{1+(x+2\partial x)}{1-(x+2\partial x)} + \ldots\ldots + \frac{1+(x+[n-1]\partial x)}{1-(x+[n-1]\partial x)},$$

und dabei die Verschiedenheit der Bedeutung einer veränderlichen Gröfse in der Theorie der Functionen und im Differenzial-Kalkul festhalten: so wird man sich ohne einen vorhergegangenen weitläuftigen Beweis schon völlig davon überzeugt halten können, dafs zwischen beiden Rechnungsarten ein wesentlicher Unterschied übrig bleibt.

§. 31.

Der Begriff einer differenziell (nicht blofs functionell) veränderlichen Gröfse, läfst sich nun so festsetzen: sie ist eine Gröfse, welche dadurch ununterbrochen verändert wird, dafs sie entweder augenblickliche Incremente annimmt, oder solche Decremente verliert, und eben darum bald eine steigende bald eine fallende Reihe darstellt. Nun würde auch die Erklärung eines Differenzials keine Schwierigkeit mehr haben, zu welchem Range es nur immer gehören mag. Iedoch wird es dienlich seyn, vorher noch die Gestalt der Hauptreihen des §. 29. dadurch abzuändern, dafs wie das Increment p mit ∂x, so auch der Verhältnifsname q mit einer Function von x, nämlich mit $a^{\partial x}$ oder $y^{\partial x}$ vertauscht werde. Dabei ist nicht aus der Acht zu lassen, dafs nach Leibnitzens ausdrücklicher Bestimmung *), diese in der unbestimmt kleinen Zeiteinheit ∂t einfach oder

*) Commerc. philos. et math. Tom. I. pag. 22.: „Quantitas constans pro Unitate sumta sit ∂x."

mehrfach hinzukommende oder verloren gehende Veränderungs-Gröſse ∂x (wie ∂y, ∂z u. dgl.) an und für sich als beständig und zugleich für eine unbestimmt kleine Einheit angesehen werden soll, aus welcher sich irgend ein Werth von x durch Addition zusammensetzen, oder durch allmählige Subtraction zernichten läſst*). Hienach kann $q = a^{\partial x}$, $q' = a^{2\partial x}$ .... oder $q = y^{\partial x}$, $q' = y^{m\partial x}$, $q'' = y^{m'\partial x}$ u. s. w. gesetzt werden. Dadurch erhalten die obigen Reihen folgende Gestalt:

I. x, $x + \partial x$, $x + m\partial x$, $x + m'\partial x$, ...

II. $\begin{cases} a^x, & a^{x+\partial x}, \quad a^{x+m\partial x}, \quad a^{x+m'\partial x}, \ldots\ldots \\ y, & \acute{y}^{x+\partial x}, \quad \acute{\acute{y}}^{x+m\partial x}, \quad \acute{\acute{\acute{y}}}^{x+m'\partial x}, \ldots\ldots \end{cases}$

Nun kann sich eine unbeständige Gröſse so verändern, daſs in gleichen Zeittheilen gleiche, aber auch so, daſs in gleichen Zeittheilen ungleiche Zu- oder Abnahmen Statt finden. Im erstern Fall sind ihre ersten, im letztern irgendwo die folgenden Differenzen beständig, wenn nicht etwa die Reihe recurrent oder an gar kein Gesetz gebunden ist. Abgesehen von diesem letztern Umstande, so kann man bei jeder veränderlichen Gröſse, sie mag eine steigende oder fallende Reihe bilden, auf irgend einige beständige Differenzen (oder Differenzentheile) kommen, und diese heissen die Differenziale. Sie bestehen zuweilen aus dem alleinigen Increment ∂x oder ∂y, sehr oft haben sie aber auch eine abgeleitete Function, z. B. $3x^2$ oder allgemein nx^{n-1} u. dgl. zum Coefficienten, und nun ist die ganze Verbindung, wie $3x^2\partial x$ etc. das Differenzial. Dabei muſs man nicht glauben, daſs der Coefficient nx^{n-1} eine Veränderung für jede folgende Zeiteinheit mit sich führe. Denn wie schon oben dargethan worden ist, wenn gleich dem x eine Veränderlichkeit in Hinsicht seiner verschiedenen Zahlenwerthe bleibt, welche ihm nacheinander gegeben werden können, so erleidet es doch ohne die Incremente oder Decremente keine wirkliche Veränderung. Es ist daher ∂x mit nx^{n-1} verbunden eben sowohl eine beständige Differenz, als wenn es ein a oder irgend eine andere beständige Gröſse zum Coefficienten hätte. Nur dann erst würde eine Veränderung da seyn, wenn der Coefficient nx^{n-1} folgende Gestalten hintereinander annähme: $n(x+\partial x)^{n-1}$, $n(x+m\partial x)^{n-1}$, $n(x+m'\partial x)^{n-1}$ u. s. w. Diesemnach beruhet im Differenzial-Kalkul aller Unterschied der beständigen Gröſsen a, b, c, d..... und der veränderlichen

*) Oper. omn. Tom. III. pag. 420, u. a. a. O.

u, *v*, *x*, *y*, *z*...... blofs darauf, dafs die letztern Incremente und Decremente annehmen, die erstern aber nicht. Dies gilt ebenfalls von den Incrementen und Decrementen ∂x, ∂y, ∂z etc., das heifst, keins von allen kann, ohne die Annahme eines Increments oder Decrements von einer nächstfolgenden Ordnung, eine Veränderung erleiden. Die Wahrheit dieser Behauptung geht schon aus dem bekannten Verfahren hervor, die zweiten und höhern Differenziale zu finden, worüber die zehnte Regel in der Einleitung verglichen werden kann. Dabei ist es der Natur des Differenzial-Kalkuls eben so zuwider, die höhern Differenziale für unendlich kleine Theile der niedern, als ∂x, ∂y, ∂z etc. für etwas anders, als für unbestimmte Differenzen zu halten, so wie es Δx, Δy und Δz sind. Dafs grade dies die Meinung des Erfinders der Differenzen-Theorie sey, ergiebt sich aus mehreren Stellen seiner gedruckten mathematischen Aufsätze*). Diesemnach läfst sich jedes höhere Differenzial unter folgenden allgemeinen Begriff bringen: Es ist die beständige Differenz einer veränderlichen Gröfse, welche sich so verändert, dafs sie die Glieder einer Reihe vom zweiten oder folgenden Range bildet. Auch könnte man so definiren: Iedes *n*te höhere Differenzial ist die *n*te Differenz einer Reihe vom *n*ten Range, als veränderliche Gröfse betrachtet. Dafs diese Definition für beide Hauptreihen gültig sey, kann man sehr leicht aus dem feststehenden Differenziations-Gesetze erkennen, den nächstvorhergehenden Zustand von dem unmittelbar folgenden abzuziehen. Wie genau sie übrigens mit der ursprünglich leibnitzischen übereinstimme, das erhellet aus ein Paar Stellen, welche hier wörtlich hergesetzt zu werden verdienen.

1. In der Beantwortung einiger Einwürfe des Niewentyt gegen den Differenzial-Kalkul sagt Leibnitz (Op. omn. T. III. pag. 327): „Nam quoties termini non crescunt uniformiter, necesse est incrementa eorum rursus differentias habere, quae sunt utique differentiae differentiarum.“

2. Am angeführten Ort S. 420 heifst es in dem Aufsatze: Monitum de Characteribus algebraicis, fast noch bestimmter also: „Hic ∂x significat elementum id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis *x* (continue) crescentis vel decrescentis. Vocatur et differentia, nempe inter

*) Man sehe weiter unten die angeführten Erklärungen, und vergleiche noch Op. omn. Tom. III. pag. 128, 169. u. a. m.

duas proximas x, elementariter differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente. Porro $\partial\partial x$ est Elementum Elementi seu differentia differentiarum (scil. duarum proximarum) nam ipsa quantitas ∂x non semper constans est, sed plerumque rursus (continue) crescit vel decrescit. Et similiter procedi potest ad $\partial\partial\partial x$ seu $\partial^3 x$ et ita porro."

Um sich hier einen richtigen Begriff von der Beständigkeit und Unbeständigkeit des Increments ∂x zu machen, können folgende Reihen zur Erläuterung dienen. Eine Gröſse, welche sich nach dieser Form

$$x,\ x + \partial x,\ x + \partial x + \partial x,\ x + 2\partial x + \partial x,\ x + 3\partial x + \partial x \ldots .$$

ändert, erhält in jeder Zeiteinheit dasselbe Increment $1 . \partial x$, und hat eben darum zwischen je zwei zunächst liegenden Gliedern dieselbe Differenz ∂x, welche ein erstes Differenzial ist. Wenn aber eine zweite Gröſse sich dergestalt verändert, daſs sie diese Reihe hervorbringt:

$$x,\ x+2\partial x,\ x+2\partial x+3\partial x,\ x+5\partial x+4\partial x,\ x+9\partial x+5\partial x \ldots .!$$

so erhält sie die momentanen Incremente $2\partial x$, $3\partial x$, $4\partial x$, $5\partial x \ldots ..$ um welcher willen erst ihre zweiten Differenzen beständig, folglich hier zweite Differenziale vorhanden sind, von denen jedes $= \partial x$ ist. Da nun aber das zweite Differenzial, wegen einer von selbst einleuchtenden Zweideutigkeit, nicht durch ∂x bezeichnet werden kann: so schreibe man die vorhergehende Reihe lieber

$$x,\ x + \partial x,\ x + \partial x',\ x + \partial x'',\ x + \partial x''', \ldots ..$$

und setze $\partial x = 2\partial^2 x$, $\partial x' = 5\partial^2 x$, $\partial x'' = 9\partial^2 x$, $\partial x''' = 14\partial^2 x$: so bildet die erste Differenzenreihe eine arithmetische Reihe vom ersten Range, und ihre Differenzen sind überall gleich, nämlich $= \partial^2 x$, also zweite Differenziale. Solchemnach müssen diese letztern als diejenigen Incremente angesehen werden, deren endliche Summen den ungleichförmigen Zuwachs oder die ungleichförmige Abnahme in der Hauptreihe, d. i. in der eigentlichen veränderlichen Gröſse, hervorbringen. Leibnitz hat bei ihnen an nichts weniger, als an unendlich kleine Theile der ∂x gedacht; dies verbürgt uns die lehrreiche Stelle in seinen Oper. omn. T. III. pag. 16. Num. IV., wo die Reihe vom dritten Range 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, ... zur Erklärung des Begriffs von dritten Differenzialen dient. Es sind nämlich die gleich groſsen Differenzen 6, 6, 6.... welche man aus der zweiten Differenzen-Reihe, als einer Reihe vom ersten Range erhält.

Daſs dieses auf nichts anders, als auf Differenziale gedeutet werden dürfe, lehret nicht nur der ganze Inhalt jener Stelle, sondern auch die bekannte Terminologie: „differentia generatrix prima, secunda, tertia," etc. deren schon oben im §. 23. unter α gedacht worden ist. Wer sich noch mehr von der Wahrheit der vorhergehenden Darstellung überzeugen will, der vergleiche die im Commerc. philos. et math. T. I. pag. 22. befindliche erläuternde Reihe, nebst ihrer bei sich führenden Erklärung. Die Reihe a, b, c, d.... ist eine fallende, und es wird ihr Anfangsglied a aus mehreren Differenzen-Reihen, deren Anfangsglieder e, l, p, t, β.... sind, summirt oder integrirt. Die beigefügte Erklärung lautet:

„Atque haec quidem procedunt tam in ordinariis seriebus, quarum termini sunt quantitates ordinariae, quam in iis, ubi sunt indefinite parvae..... Jam rem ad calculum differentialem accommodando, pro a ponatur y, et pro e, l, p, t, β etc. poni poterit respective ∂y, $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\partial^4 y$, $\partial^5 y$ etc..... Quantitas constans pro unitate sumta sit ∂x infinite (unbestimmt) parva, et $1.\partial x + 1.\partial x + 1.\partial x + ...$ erit $= x$, et ideo $1.\partial x + 2.\partial x + 3.\partial x + 4.\partial x$ etc. erit $\int x$, et $1.\partial x + 3.\partial x + 6.\partial x + 10.\partial x$ etc. est $\int\int x$, et $1.\partial x + 4.\partial x + 10.\partial x + 20.\partial x$ etc. est $\int\int\int x$ etc."

Deutlicher konnte sich Leibnitz doch wohl nicht über die Bedeutung seiner Differenziale aussprechen. Sie entstehen durch die natürliche Differenzenfolge der Reihen. Auch geht hieraus unläugbar hervor, daſs wenn die ersten Differenzen eine Reihe bilden die entweder lauter Differenzen $= 0$ giebt, oder vom ersten, zweiten, dritten etc. Range ist, in derselben Ordnung eine einfache, zweifache, dreifache, vierfache etc. Summation oder Integration erfoderlich sey, um das Anfangsglied der Hauptreihe oder das Integral zu erhalten. Dies alles beweiset, daſs die oben gewählte erläuternde Form der Reihe: x, $x + 2\partial^2 x$, $x + 5\partial^2 x$ u. s. w. der Natur des Differenzial-Kalkuls eben so wenig, als dem Gesetze der Reihen überhaupt widerstreite. Die Differenzen-Methode erfodert also keinesweges unendlich kleine Gröſsen der höheren Ordnungen, um die höheren Differenziale darzustellen, sondern man kann diese mit allem Fug und Recht aus Gröſsen zusammensetzen, von denen keine einzige unendlich klein, oder unendlichemal unendlich klein ist.

Es leuchtet nun von selbst ein, was die Bezeichnungsart $\partial(\partial y)$ u. dgl. sagen wolle. Sie setzt eine veränderliche Gröſse voraus, welche eine Reihe y, $y + \partial y$,

$y+\partial y'$, $y+\partial y''$ u. s. w. bildet, in welcher der Zuwachs in jedem folgenden Gliede anders als im zweiten ist, und wo $\partial y = m\partial^2 y$, $\partial y' = m'\partial^2 y$, $\partial y'' = m''\partial^2 y$ u. s. f. angenommen werden muſs. Sollten $m\partial^2 y$, $m'\partial^2 y$, $m''\partial^2 y$.... noch nicht eine Reihe vom ersten Range geben, so würde eben deshalb nöthig seyn, $m\partial^2 y$ in $p\partial^3 y$, $m'\partial^2 y$ in $p'\partial^3 y$, $m''\partial^2 y$ in $p''\partial^3 y$ u. s. f. aufzulösen, bis man zu gleich groſsen Differenzen $\partial^3 y$, $\partial^3 y$, $\partial^3 y$..... u. dgl. gelangt. Hieraus geht die wahre Bedeutung der Veränderlichkeit der Incremente ∂y, dz und ähnlicher hervor. Sie sind nämlich in der Hauptreihe oder eigentlichen veränderlichen Gröſse die Differenzen zwischen dem ersten und zweiten Gliede, oder die Anfangsglieder der ersten Differenzen-Reihe. Wenn man also sagt, ∂y ist noch veränderlich, so heiſst das, die erste Differenzenreihe hat noch veränderliche Glieder, die gröſser oder kleiner als ∂y werden, z. B. ∂y, $\partial y+\partial^2 y$, $\partial y+2\partial^2 y$, $\partial y+3\partial^2 y$ u. dgl. Diese Glieder sind dann aber noch keine Differenziale, sondern bloſse Differenzen: daher man auch eigentlich nicht sagen sollte: die Differenziale sind noch veränderlich. Eben so unstatthaft und widersinnig ist es, wenn die Theorie der Gränz-Verhältnisse (vergl. §. 19 unter β.) die Behauptung aufstellt, es könnten in dem Ausdrucke $y=x^n$ auf der einen Seite veränderliche Differenziale ∂y, $\partial^2 y$ etc. aber auf der andern beständige Differenziale ∂x, ∂x..... durch alle Instanzen fort gedacht werden. Dieser unnatürliche, dem Gesetze der Reihen durchaus widersprechende Satz fällt von selbst weg, sobald man den irrigen Begriff aufgiebt, daſs die Incremente ∂x, ∂y, ∂z überall die Differenziale sind. Wird $y=x^n$ genommen, und eine allgemeine Hauptreihe verlangt, in welcher erst die $n$te Reihe der Differenzen beständige Glieder oder Differenziale haben soll, so ist folgende Gestalt nöthig:

$$x^n,\ x^n+nx^{n-1}\partial x,\ x^n+2nx^{n-1}\partial x+n(n-1)x^{n-2}\partial x^2,\ x^n+3nx^{n-1}\partial x+3n(n-1)x^{n-2}\partial x^2 +n(n-1)(n-2)x^{n-3}\partial x^3,\ x^n+4nx^{n-1}\partial x+6n(n-1)x^{n-2}\partial x^2+4n(n-1)(n-2)x^{n-3}\partial x^3 +n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\partial x^4 \text{ u. s. w.}$$

wo das Gesetz der Zahlencoefficienten leicht in die Augen fällt, wenn man die aufeinander folgenden binomischen Potenzen berücksichtigt, zu welchen anstatt n die Exponenten 1, 2, 3 u. s. w. genommen werden. Durch den Abzug eines jeden vorhergehenden Gliedes von dem zunächst folgenden, entsteht die erste Differenzenreihe mit dem Anfangsgliede $nx^{n-1}\partial x$; die zweite Differenzenreihe mit dem Anfangsgliede $n(n-1)x^{n-2}\partial x^2$ und so immer weiter. Ob nun gleich diese

eben bemerkten Formen mehrentheils Differenziale zu seyn oder wenigstens genannt zu werden pflegen, so sind sie es hier doch nicht, sondern bloſse Differenzen, oder Anfangsglieder von Reihen, die immer noch nicht Differenzen $= 0$ geben. Eben so wenig ist ∂x allein das Differenzial, welches kaum erinnert zu werden braucht. Man hat folglich weder auf der einen, noch auf der andern Seite früher Differenziale oder beständige Differenzen, als bis man an der $(n-1)$ten Differenzenreihe anlangt, welche auf beiden Seiten der Gleichung eine Reihe vom ersten Range wird. Daſs aber in diesem Fall ∂x durchaus unverändert bleiben darf, hat seinen Grund in den Coefficienten desselben, die es in jedem Gliede der Hauptreihe und der nachfolgenden Differenzenreihen bis auf die vorletzte, ungleich vervielfachen, und eben dadurch Reihen vom $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten und folgenden Range hervorbringen. Man könnte auf der andern Seite der Gleichung mit leichter Mühe auch ein beständiges Increment zu wege bringen; denn beim Herabsteigen durch alle Differenzenfolgen der Reihe y, $y + \partial y$, $y + \partial y'$ etc. kommt man zuletzt auf beständige Incremente $\partial^n y$, $\partial^n y$ u. s. w. durch deren Summation sich alle die ungleichen ∂y, $\partial y' \ldots\ldots$ $\partial^2 y$, $\partial^2 y' \ldots\ldots$ $\partial^3 y$, $\partial^3 y'$ u. s. w. ausdrücken lassen, so daſs die Hauptreihe der Gröſse y jetzt in der Gestalt y, $y + m\partial^n y$, $y + m'\partial^n y$ u. s. f. erscheinen, und wie die Reihe x^n ihr unverändertes Increment haben kann.

Aus diesem allen läſst sich nun folgender Schluſs ziehen: so oft angenommen werden darf, daſs eine veränderliche Gröſse ein Differenzial von der $m$ten Ordnung hat, muſs bloſs die $m$te Differenzenreihe und keine andere beständige Differenzen geben. Diesemnach leidet die jedesmalige besondere Veränderungsform einer veränderlichen Gröſse immer nur ein einziges Differenzial, es mag nun von der ersten, zweiten oder folgenden Ordnung seyn. Oder mit andern Worten: keine veränderliche Gröſse hat auf einmal mehr, als ein einziges Differenzial, z. B. ein zweites; und soll sie ein anderes haben, z. B. ein drittes: so muſs zuvor die Form ihrer Veränderung in eine andere übergehen, und ihre Beziehung eine andere werden. Hieraus erklärt sich zugleich das gewöhnliche Verfahren der Differenzial-Rechnung, daſs sie um ein Differenzial zu finden, bloſs die beiden ersten Glieder entweder in der Hauptreihe, oder in irgend einer Differenzen-Reihe von einander abzieht. Dies kann unter keiner andern Bedingung geschehen, als unter der Voraussetzung, daſs die Diffe-

renzen von je zwei zunächst liegenden Gliedern in der ganzen Reihe gleich werden. Verlangt man z. B. von x^n das Differenzial der vierten Ordnung, so muſs die dritte Differenzenreihe folgende Glieder haben, von denen sich auf die Gestalt der Hauptreihe, das ist der veränderlichen Gröſse selbst, zurückschlieſsen läſst:

$$n(n-1)(n-2)\partial x^3 x^{n-3},\ n(n-1)(n-2)\partial x^3(x+\partial x)^{n-3},$$
$$n(n-1)(n-2)\partial x^3(x+2\partial x)^{n-3},\ n(n-1)(n-2)\partial x^3(x+3\partial x)^{n-3}, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus entspringt die allgemeine Regel, daſs wenn ein erstes Differenzial Statt finden soll, die Hauptreihe Num. I. im gegenwärtigen §. die Gestalt

$$x,\ x\pm\partial x,\ x\pm 2\partial x,\ x\pm 3\partial x,\ x\pm 4\partial x, \ldots\ldots$$

die Hauptreihe Num. II. aber die Form

a^x, $a^{x\pm\partial x}$, $a^{x\pm 2\partial x}$, $a^{x\pm 3\partial x}$, $a^{x\pm 4\partial x}$ u. s. w. haben muſs. Eben so nothwendig ist es, daſs die einem jeden Differenzial von der $m$ten Ordnung vorangehende $(m-1)$te Differenzenreihe, eine Reihe vom ersten Range sey.

§. 32.

Aus der Beschaffenheit einer veränderlichen Gröſse läſst sich nun die Natur eines veränderlichen Verhältnisses leicht abnehmen. Vergleicht man die veränderliche Gröſse x mit der beständigen a in verschiedenen aufeinander folgenden Zeiteinheiten, so giebt unter andern die Veränderungs-Form x, $x\pm\partial x$, $x\pm 2\partial x, \ldots\ldots x\pm(n-1)\partial x$ die Verhältniſs-Folge

$$a : \begin{cases} x \\ x\pm 2\partial x \\ x\pm 3\partial x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ x\pm(n-1)\partial x. \end{cases}$$

Hier ist das in jeder folgenden Zeiteinheit (Index-Zahl) vorhandene Verhältniſs anders, als in der vorhergehenden. Daher giebt es während des ganzen Verlaufs der Vergleichung (Rechnung) kein Verhältniſs, welches mit ihr eine gleich lange Dauer hätte. Denn je länger die Veränderung vor sich geht, desto mehr weichen die nachfolgenden Verhältnisse von den vorhergehenden ab. Hieraus leuchtet nun klar genug ein, Erstlich, daſs es ein eitles und fruchtloses

Unternehmen sey, die ersten und letzten Verhältnisse $a:x$ und $a:x \pm (n-1)\partial x$ so gebrauchen zu wollen, als wären sie stellvertretend entweder für alle nachfolgenden, oder für alle vorhergehenden; fürs Zweite, daſs man mit veränderlichen Gröſsen unmöglich rechnen könne, wenn sie nicht dahin zu bringen sind, daſs sie stehende Verhältnisse und stehende Gleichungen geben. Denn mit ihren unmittelbaren Gleichungen hat es grade die Bewandniſs, wie mit ihren unmittelbaren Verhältnissen. Setzen wir z. B. mit Beibehaltung der vorigen Veränderungs-Form, in der ersten Zeiteinheit $x = a$, so ist daraus in der zweiten $x + \partial x > a$, in der dritten $x + 2\partial x > x + \partial x > a$, und in der $n$ten $x+(n-1)\partial x > x+(n-2)\partial x \ldots\ldots > a$ geworden. Hieraus ergiebt sich, daſs man zunächst stehende Verhältnisse nöthig habe, welche zu stehenden Proportionen, und vermittelst dieser auch zu solchen Gleichungen dienen. In Hinsicht der Verhältnisse, von welchen alles Uebrige abhängt, ist das Differenzial eine stellvertretende Gröſse für je zwei zunächst liegende Glieder in der Reihe. Es geben aber alle Glieder in ihrer unmittelbaren Folge eine und dieselbe beständige Differenz. Daher ist das Differenzial stellvertretend für die ganze Reihe, das heiſst für die Stammgröſse (primitive Function) in allen ihren Veränderungen. Es wird also das veränderliche Verhältniſs in ein stehendes verwandelt, indem die einzige beständige Differenz die ganze Reihe der nacheinander zum Vorschein kommenden Glieder vertritt. Nun entsteht aber die Frage, ob man mit solchen Verhältnissen rechnen könne, wo das eine Glied, oder auch wohl beide zugleich Differenzen sind. Um sie zu beantworten, darf man jeden Fragenden bloſs auf die bekannte Form der Verhältnisse und Proportionen verweisen, welche die ältern Mathematiker unter dem Ausdruck „Differentiando“ verstanden, und welcher zu der Benennung des Differenzial-Kalkuls wo nicht die erste, doch wahrscheinlich eine beiläufige Veranlassung gegeben haben muſs. Es kommt, wie jedermann weiſs, nicht nur in den Geometrien, sondern auch im Kalkul sehr oft folgende Gestalt der Proportionen vor:

$$a - b : b = c - x : x$$

oder $a - b : c - x = b : x$.

In dem vorletzten dieser Verhältnisse sind beide Glieder Differenzen, in den übrigen ist nur eins eine solche. Um hier das Gesuchte zu erhalten, ist noch eine besondere analytische Operation nöthig, an welche bei den gemeinen Pro-

portionen, wie $a:b=c:x$, gar nicht gedacht wird. Es muſs nämlich bei dieser indirecten Methode, das eigentliche Resultat der Proportions-Rechnung erst aus der Gleichung $x = \frac{bc - bx}{a - b}$ entwickelt werden, welches $ax = bc$ oder $x = \frac{bc}{a}$ ist, übrigens aber mit dem Ergebnisse der directen Methode der Proportionen ganz übereinstimmt. Hieraus wird nun klar, daſs die Verhältnisse, welche die Differenzial-Rechnung giebt, jedesmal zu einer indirecten Rechnungs-Methode (in Proportionen und Gleichungen) führen. Auch begreift man sogleich, warum der Differenzial-Kalkul allein, weder durch seine Proportionen noch durch seine Gleichungen, das Gesuchte im Allgemeinen geben kann, sondern mehrentheils eine Rechnungs-Operation erfodert, welche unter dem Namen der Integration bekannt ist. Wie unzertrennlich überhaupt der Differenzial- und Integral-Kalkul miteinander verbunden sind, und was dieser letztere in der höheren Analysis bedeute, daſs läſst sich eben so ausführlich an einem Beispiel, als im Allgemeinen zeigen. Angenommen es sollte durch eine Proportions-Rechnung gefunden werden, wie groſs der auf einer geneigten Ebene von einer Kugel mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit in t Zeiteinheiten durchlaufene Raum sey: so würde, für den Sinus des Neigungswinkels β gesetzt, die Verbindung der Gröſsen folgende Gestalt haben:

	Reihe	beständ. Differ.
	$1\beta g$	
	$3\beta g$	
$1 :$	$5\beta g$	$2\beta g = t : 2\beta g t.$
	$7\beta g$	
	.....	

Vermittelst der beständigen Differenz $2\beta g$ läſst sich die Rechnung nun grade so führen, wie im niedern Kalkul. Aber die vierte Proportional-Zahl ist nicht schon das Gesuchte selbst, sondern eine beständige Differenz, und zwar wegen der Veränderungs-Form der vorhergehenden Reihe, von der ersten Ordnung. Es muſs demnach das Anfangsglied der Hauptreihe gesucht werden, zu welcher sie gehört: folglich bleibt noch eine arithmetische Verrichtung übrig, welche Leibnitz die Summation, Johann Bernoulli hingegen (zu-

folge des Commerc. philos. et math. Tom. II. pag. 161.) die **Integration** nannte. Von der leibnitzischen Benennung, die in Op. omn. T. III. pag. 420 erklärt wird *), schreibt sich das eingeführte Zeichen $\int$, von der bernoullischen aber der Ausdruck **Integral** her. Da im vorliegenden Fall ausser t keine Gröſse veränderungsfähig, oder $2\beta g$ an sich constant ist **): so kann man aus der Gestalt der beständigen Differenz $2\beta gt$ mit aller Gewiſsheit auf die Beschaffenheit derjenigen Reihe zurückschlieſsen, welcher sie angehört. Es ist, wenn das Increment $\partial t = 1$ gesetzt wird, keine andere, als

$$\beta g \; [t^2 + (t+1)^2 + (t+2)^2 + (t+3)^2 + \ldots\ldots]$$

wegen $\beta g \; (t^2 + 2t - t^2) = 2\beta gt$, folglich das gesuchte Anfangs-Glied oder terminus generans $= \beta gt^2 =$ dem in t Zeiteinheiten durchlaufenen Raume. Daſs es sich mit andern Differenzialen eben so verhält, wie mit diesem ungewöhnlichen, wird schon um seines richtigen und ungekünstelten Integrals willen voraus zu sehen seyn. Auch darf es wohl nicht mehr erinnert werden, daſs die zweiten, dritten und folgenden Differenziale dieselben Dienste thun, wie das hier gebrauchte erste. Denn so oft man durch Differenziation auf eine beständige Differenz kommen kann, ist man im Stande, die veränderliche Gröſse, als eine Reihe vom $n$ten Range, mit einer unveränderlichen zu vertauschen, und sie ganz nach dem Mechanismus des niedern Kalkuls zu behandeln. Iedoch ist das auf diese Weise durch eine Proportion oder Gleichung erhaltene Resultat nichts anders, als eine beständige $n$te Differenz, das heiſst ein Differenzial der $n$ten Ordnung, und es muſs hinterher das Anfangsglied der Hauptreihe oder das zugehörige Integral gesucht werden.

§. 33.

Nach dieser Vorbereitung würde es gar nicht schwer seyn, die bekannten Differenzial-Formeln zu entwickeln; denn es gehöret überall nichts weiter dazu, als je zwei zunächst liegende Glieder in der durch die Veränderung der unbeständigen Gröſse zum Vorschein kommenden Reihe von einander abzuziehen.

*) Es heiſst an dieser Stelle: „Contrarium ipsius Elementi vel differentiae est Summa, quoniam Quantitate (continue) decrescente donec evanescat, quantitas ipsa semper est summa omnium differentiarum sequentium. . . . . . Dantur et Summae Summarum et ita porro.

**) Man vergl. das Vorhergehende.

Aber der Differenzial-Kalkul wirft einige Theile mancher Differenzen weg, und dies hat von je her so viel Aufsehen erregt, daſs man sich überredete, hierin müsse das Hauptfundament und das eigentliche Wesen dieser Rechnungs-Art gesucht werden, obgleich es eine bloſse Nebensache ist. Denn der ganze Kalkul kann und muſs der Hauptsache nach bereits fertig seyn, bevor dieser Nebenumstand auch nur eine einzige Frage veranlaſst. Käme überhaupt keine andere Form der veränderlichen Gröſsen vor, als die in der Hauptreihe Num. I. liegende, und würden ihre momentanen Glieder niemals potenzirt: so würde in der Differenzial-Rechnung von dem Wegwerfen einiger Differenzen-Theile nie die Rede gewesen seyn. Da nicht alle Differenziale dieser anscheinenden Verstümmelung unterworfen sind, so läſst sich daraus schon der Schluſs ziehen, daſs keine allgemeine sondern bloſs eine besondere Veranlassung dazu vorhanden seyn müsse. Folgende Betrachtung wird über dies groſse Räthsel vorläufig das nöthige Licht verbreiten, und zugleich den Unterschied verständigen, welchen Leibnitz zwischen seinem calculo differentiali generali und speciali seu infinitesimali machte.

Eine jede Function, sie mag ein Binomium, Trinomium, Polynomium oder zusammengesetzt seyn wie sie wolle, kann immer einer monomischen Gröſse gleich gedacht werden. Als Beispiele dienen hier diejenigen Gleichungen für krumme Linien, welche Definitionen der Ordinate sind. Wenn wir die veränderlichen Gröſsen in der Natur betrachten, so zeigen sich überall Monomien. Es erscheint z. B. keine Bewegung, keine Geschwindigkeit, keine Schwere u. s. w. als ein arithmetisches Binomium, Trinomium, oder Polynomium, sondern jede dieser Erscheinungen ist ein Einiges, und leidet eben darum einen Zuwachs oder eine Abnahme vermittelst der Incremente und Decremente, welche dem Monomium eigen ist. Das heiſst, es geht aus dem Zustande dieses letztern, in den Zustand eines Binomiums über, jedoch so, daſs es in der ersten Potenz bleibt; z. B. x; $x + \partial x$, $x + m\partial x$, $x + m'\partial x$ u. s. w.

Dagegen können die bezeichnenden Gröſsen fürs Erste nicht immer Monomien seyn, wie unter andern bei der Berechnung fallender Körper in widerstehenden Mitteln. Fürs Zweite, sie können, wenn sie gleich monomische Stammgröſsen sind, nicht immer in der ersten Potenz gebraucht werden, sondern erfodern bald die zweite, bald die dritte, bald eine noch höhere. Eben

darum findet bei ihnen eine differenzielle Veränderung Statt, welche eine ganz andere Fortschreitung der Reihe, oder eine ganz andere Veränderungs-Form verursacht, bei welcher die Differenzen weder unter sich in allen ihren Theilen, noch den ihnen gegenüber stehenden gleichnamigen Differenzen gleich werden. Der Differenzial-Kalkul erfodert aber gleiche Differenzen, wenn sie Differenziale seyn sollen. Daher müssen in den potenzirten binomischen Gliedern der Reihen einige Theile weggeworfen werden, damit man stehende Differenzial-Gleichungen erhält. Die Nothwendigkeit dieses Verfahrens läſst sich an einem Beispiele zeigen. Setzt man den Parameter der Parabel $= 1$, so entsteht die Gleichung $y^2 = x$. Da beide veränderliche Gröſsen zum Behuf der Rectification, Quadratur, Kubatur und Erfindung der Oberflächen keine andern, als erste Differenziale geben: so muſs die Hauptreihe jeder unbeständigen Gröſse sich durch das Wachsthum ∂x, $2\partial x$, $3\partial x \ldots\ldots (n-1)\partial x$ und ∂y, $2\partial y$, $3\partial y \ldots\ldots (n-1)\partial y$ verändern. Iede von beiden Gröſsen ist im ersten Gliede ihrer Reihe ein Mononomium, in allen übrigen ein Binomium, jedoch mit dem Unterschiede, daſs die binomischen Glieder in der Reihe x in der ersten, in der Reihe y^2 aber in der zweiten Potenz stehen. Dadurch kommt in die letztere dieser beiden Reihen etwas Ueberflüssiges *) hinein, welches weggeworfen werden muſs, einerseits damit die Differenzen auf beiden Seiten proportional bleiben, andererseits damit die Differenzen in der Reihe y^2 auch unter sich gleich werden, weil ihnen sonst nach der Natur des Differenzial-Kalkuls die Eigenschaft eines Differenzials fehlen würde. Man hat nämlich auf der einen Seite die Reihe y^2, $(y + \partial y)^2$, $(y + 2\partial y)^2$, $(y + 3\partial y)^2 \ldots\ldots$ d. i. y^2, $y^2 + 2y\partial y + \partial y^2$, $y^2 + 4y\partial y + 4\partial y^2$, $y^2 + 6y\partial y + 9\partial y^2, \ldots\ldots$ und wenn je zwei unmittelbar auf einander folgende

*) C. Mac Laurin sagt (vergl. hier §. 10 u. S. 416 der engl. Urschrift) „For instead of neglecting m' because it is infinitely leſs than m, we may reject it, because we may thence conclude that it is not produced in consequence of the generating motion“ . . . . sofern nämlich, wie oben bemerkt worden ist, die Gröſsen in der objectiven Natur immer Monomien etc. sind. Hier ergriff er einen Gedanken, den er hätte festhalten, und zur wahren Begründung der Fluxions-Theorie, oder vielmehr zur Ergründung des leibnitzischen Differenzial-Kalkuls benutzen sollen. Aber es findet sich in seiner Schrift nirgend eine Spur, daſs er veränderliche Gröſsen als unpotenzirte Monomien oder Binomien und als potenzirte Monomien und Binomien jemals gehörig miteinander verglichen hätte, um die leibnitzischen Gründe der Elimination völlig verstehen zu lernen.

Glieder von einander abgezogen werden, die Differenzen $2y\partial y + 1\partial y^2$, $2y\partial y + 3\partial y^2$, $2y\partial y + 5\partial y^2$, $2y\partial y + 7\partial y^2$, ... welche sofort gleich groſs oder Differenziale werden, wenn man das Quadrat des Increments, als ein unbeständiges oder in keiner einzelnen Differenz gleich groſs bleibendes Glied, wegwirft. Dieses muſs aber durchaus wegfallen, weil sonst keine Proportionalität der Differenzen auf beiden Seiten Statt finden kann. Denn die Gröſse x giebt die Reihe x, $x + \partial x$, $x + 2\partial x$, $x + 3\partial x$, $x + 4\partial x$, u. s. w. und die durchaus gleichen Differenzen ∂x, ∂x, ∂x, ∂x.......

Wie sich nun die Differenzen auf der einen Seite, so müssen sie sich auch auf der andern verhalten: daher Glied für Glied miteinander verglichen

1 u. 2, $\partial x : \partial x = 2y\partial y : 2y\partial y$

2 u. 3, $\partial x : \partial x = 2y\partial y : 2y\partial y$ u. s. f.

giebt, sobald die durch Potenzirung zu viel hinzu gekommenen oder unbeständig gewordenen Theile wegfallen. Hierauf deuten die im §. 1. angeführten merkwürdigen Worte aus Op. omn. T. III. pag. 80 u. f. hin: „Omisso quadrato quantitatis ∂y, ob rationes ex methodo de Maximis et Minimis notas.“ Fermat gründete nämlich seine Theorie vom Kleinsten und Gröſsten auf die gegenseitige Beziehung der Monomien und Binomien in ihrem unpotenzirten und potenzirten Zustande u. s. f. Es wird sich überdies bei der Integration zeigen, daſs diese weggeworfenen Differenzenglieder nicht nur völlig überflüssig sind, sondern auch mit dem Coefficienten Null versehen werden müssen, wenn sie nicht im höhern Kalkul hinderlich seyn sollen. Man sieht hieraus, daſs alle diejenigen der leibnitzische Vorwurf im Commerc. philos. et math. T. II. pag. 380, ... „equos, ut in proverbio est, adjungunt post currum“, treffe, welche von der Elimination der Binomial-Glieder anfangen, um eine Differenzial-Rechnung zu Stande zu bringen. Diese letztere muſs über ihre eigentlichen Principien schon ganz im Reinen seyn, bevor an jene gedacht werden kann. Gäbe es keine anderen Gleichungen, als $y = x$, wie für die Radlinie, wenn die Abscissen auf dem Umfange des Generators genommen werden: so würde niemals eine Berichtigung der Differenzial-Verhältnisse und Differenzial-Gleichungen durch Wegwerfung einiger Differenzen-Glieder Statt gefunden haben. Ietzt aber, da dieses Verfahren schon um der Natur eines Differenzials willen durchaus nöthig ist, müssen die, durch die besondere Veränderungsform einer oder der an-

dern Reihe überschüssig werdenden Glieder wegfallen, wenn gleich die momentanen Incremente oder Decremente wer weiſs wie groſs seyn sollten. Soweit nun es nicht auf die Gröſse (eigentlich Kleinheit) der Incremente oder Decremente, sondern lediglich auf das algorithmische Gesetz der Differenziale ankommt, einzelne Glieder wegzuwerfen, soweit erstreckt sich der leibnitzische Calculus differentialis generalis. Es giebt aber auch Rechnungsfälle, wo man die momentanen Incremente oder Decremente sehr klein nehmen muſs, um Differenziale zu erhalten. Diese machen den Calculum differentialem specialem oder den sogenannten Infinitesimal-Kalkul aus. Zu ihm gehören unter andern die Differenziale der Kreisfunctionen: daher wir diese hier von den übrigen trennen, und bis zur Anwendung des Differenzial-Kalkuls auf Geometrie versparen wollen.

§. 34.

I. Differenziation einer beständigen Gröſse.

Da eine beständige Gröſse in keinem folgenden Augenblick eine Vermehrung oder Verminderung erleidet, so bildet sie eine Reihe, in welcher alle Glieder einander gleich, folglich auch alle Differenzen $= 0$ sind. Man sieht hieraus einerseits den Grund ein, warum das Differenzial einer beständigen Gröſse Null seyn müsse, und andererseits wie inconsequent es ist, das Differenzial einer veränderlichen Gröſse dem Differenzial einer beständigen gleich zu setzen. Ein Fehler, der sowohl in der Theorie der Gränz-Verhältnisse, als auch in der künstlichen Nullen-Rechnung begangen wird.

II. Differenziation einer veränderlichen Gröſse $y \ldots = x,\ x + \partial x,\ x + m\partial x,\ x + m'\partial x \ldots\ldots$

1. Wenn die Veränderungsform dieser Gröſse von solcher Beschaffenheit seyn soll, daſs sie erste Differenziale giebt, so muſs $m = 2$, $m' = 3$ u. s. w. genommen werden, und man hat $\partial y = \partial x$.

2. Sollen aber die ersten Differenzen noch veränderlich seyn, so müssen die Vorderglieder ∂y und ∂x wiederum Incremente oder Decremente erhalten, und folgende Reihen bilden:

$$\partial y,\ \partial y \pm \partial^2 y,\ \partial y \pm 2\partial^2 y,\ \partial y \pm 3\partial^2 y \ldots\ldots =$$
$$\partial x,\ \partial x \pm \partial^2 x,\ \partial x \pm 2\partial^2 x,\ \partial x \pm 3\partial^2 x \ldots\ldots$$

wo bloſs nöthig ist, $\partial x > \partial^2 x$ und $\partial y > \partial^2 y$ zu nehmen. Wegzuwerfen hat man hier überall nichts; auch läſst sich sehr leicht einsehen, daſs um dritte Differenziale zu bekommen, die Reihe der $\partial^2 y$ oder $\partial^2 x$ die Gestalt $\partial^2 y$, $\partial^2 y \pm \partial^3 y$, $\partial^2 y \pm 2\partial^3 y$, $\partial^2 y \pm 3\partial^3 y$ u. s. f. haben müſste.

III. Differenziation einer veränderlichen Gröſse $y = x^n$.

1. Ein erstes Differenzial von y erfodert einerseits die Hauptreihe y, $y + \partial y$, $y + 2\partial y, \ldots$ und auf der andern Seite x^n, $(x + \partial x)^n$, $(x + 2\partial x)^n$, $(x + 3\partial x)^n$, u. s. w. Die hieraus entstehenden Glieder sind, ausser dem ersten, binomische Potenzen, deren Abzug von einander nur unter der Bedingung des vorhergehenden Paragraphs Differenziale giebt. Denn man hat das

$$1 \text{ Glied} = x^n$$

$$2 \ldots\ldots = x^n + nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 + \ldots\ldots$$

$$3 \ldots\ldots = x^n + 2nx^{n-1}\partial x + 2n(n-1) x^{n-2}\partial x^2 + \ldots\ldots$$

$$4 \ldots\ldots = x^n + 3nx^{n-1}\partial x + \frac{9n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 + \ldots\ldots$$

$$5 \ldots\ldots = x^n + 4nx^{n-1}\partial x + 8n(n-1) x^{n-2}\partial x^2 + \text{u. s. w.}$$

Iedes vorhergehende Glied von dem nächstfolgenden abgezogen, giebt einen beständigen Theil $nx^{n-1}\partial x$, und ausser diesem sind alle übrigen Differenzen-Theile unbeständig. Läſst man diese letztern weg, so wird der beständige Theil schon an sich ein Differenzial, und überdies erhält man auf beiden Seiten einerlei Differenzial-Verhältniſs, nämlich

$$\partial y : \partial y : \partial y \ldots\ldots = nx^{n-1}\partial x : nx^{n-1}\partial x : nx^{n-1}\partial x \ldots\ldots$$

Hier ist eine aus den Gesetzen des Kalkuls entspringende Nothwendigkeit vorhanden, in jedem Gliede der Differenzen-Reihe den ganzen unbeständigen Theil, also alles, was auf $nx^{n-1}\partial x$ folgt, wegzuwerfen, anstatt daſs der Fundamentalsatz des neuern Functionen-Kalkuls es bloſs auf Willkühr ankommen lassen kann. Offenbar ist der Differenzial-Kalkul hier besser berathen, als die ihn ohne gehörige Untersuchung tadelnde Theorie der analytischen Functionen.

2. Giebt es wegen der ungleichförmigen Incremente oder Decremente der y und x^n, ein zweites Differenzial: so muſs, zufolge des §. 31. die erste Differenzenreihe eine Reihe vom ersten Range seyn. Eine solche erhält man aus dem

Vordergliede $nx^{n-1}\partial x$, wenn x^{n-1} Incremente oder Decremente von folgender Gestalt bekömmt: $n\partial x \,.\, x^{n-1}$, $n\partial x(x+\partial x)^{n-1}$, $n\partial x(x+2\partial x)^{n-1}$, ...

Die gehörige Potenzirung, Subtraction der Glieder von einander und Absonderung ihres unbeständigen Theils, giebt das zweite Differenzial $= n(n-1)x^{n-2}\partial x^2$. Aus der Form der Ableitungs-Reihe (d. i. der dem Differenzial unmittelbar vorangehenden Differenzenreihe) läſst sich auf die Veränderungs-Form der Hauptreihe, das heiſst der veränderlichen Gröſse selbst schlieſsen. Auf eben dem Wege gelangt man zu dritten, vierten und noch höhern Differenzialen dieser Art.

3. Ganz allgemein ist das *m*te Differenzial von x^n oder

$$\partial^m(x^n) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-[m-2])(n-[m-1])x^{n-m}\partial x^m,$$

es mag der Exponent n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn. Da diese Differenzialform, welche bei ihrer Anwendung die Arbeit sehr abkürzt, manchmal negative Differenziale giebt, wo man doch überzeugt ist, daſs die veränderliche Gröſse sich durch Zuwachs verändert hat: so könnte vielleicht der Zweifel entstehen, ob auch die oben vorgeschriebene Entwickelung einer Reihe und der Abzug ihrer zunächst liegenden Glieder von einander, mit dieser abgekürzten Methode überall zusammentreffe. Indessen die Einerleiheit der Resultate beider Verfahrungs-Arten ist so nothwendig, daſs die abgekürzte sich ohne die allgemeine gar nicht denken oder für wahr anerkennen läſst; und es ist leicht genug, bei der Differenziation jeder besondern Function diese Uebereinstimmung zu finden, wie unter andern in folgenden Beispielen:

α.) $\partial(x^{-2}) = -2x^{-3}\partial x$, nach der Formel;

β.) $\partial^3(x^{-4}) = -120x^{-7}\partial x^3$, ...

γ.) $\partial^2(x^{\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\partial x^2$, ...

Sucht man diese Differenziale vermittelst der Auflösung der unbeständigen Gröſsen in Reihen: so ist

$$\alpha = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{(x+\partial x)^2}, \frac{1}{(x+2\partial x)^2}, \ldots\ldots$$

und $\frac{1}{(x+\partial x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x\partial x}{x^4} = -\frac{2\partial x}{x^3}$, wenn nämlich die veränderlichen Differenzen-Theile weggeworfen werden;

$$\beta = \frac{20\partial x^2}{x^6},\ \frac{20\partial x^2}{(x+\partial x)^6},\ \frac{20\partial x^2}{(x+2\partial x)^6},\ \ldots\ldots$$

und $\dfrac{20\partial x^2}{(x+\partial x)^6} - \dfrac{20\partial x^2}{x^6} = \dfrac{20x^6\partial x^2 - 20x^6\partial x^2 - 6.20x^5\partial x^3}{x^{12}} = -120\dfrac{\partial x^3}{x^7};$

$$\gamma = \frac{\partial x}{2x^{\frac{1}{2}}},\ \frac{\partial x}{2(x+\partial x)^{\frac{1}{2}}},\ \frac{\partial x}{2(x+2\partial x)^{\frac{1}{2}}},\ \ldots\ldots$$

und $\dfrac{\partial x}{2(x+\partial x)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\partial x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2x^{\frac{1}{2}}\partial x - 2x^{\frac{1}{2}}\partial x - x^{-\frac{1}{2}}\partial x^2}{4x} = -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{\partial x^2}{x^{\frac{3}{2}}}.$

Dies alles gründet sich auf dem allgemeinen Mechanismus des Kalkuls, und es ist hiebei an kein Princip zu denken, welches in diesem letztern nicht ganz einheimisch wäre. Auch kann man sich auf diese Weise in jedem Fall sehr leicht davon überzeugen, daſs keine Differenzial-Formel etwas anders vorschreibt, als was dem Gesetze der Reihen und der besondern Form ihrer Glieder gemäſs ist. Hieraus leuchtet es zugleich ein, wie die zweite Regel in der Einleitung entstehen muſste, und warum sie eine Allgemeingültigkeit hat.

4. Die allgemeine Differenzial-Form $nx^{n-1}\partial x$ ist sehr brauchbar, die **ersten** Differenziale zusammengesetzter Functionen, welche mit irgend einem ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten behaftet sind, zu finden. Man hat nur nöthig, die vorgelegte zusammengesetzte Function einer einfachen mit demselben Exponenten und Coefficienten gleich zu setzen, die letztere nach Maaſsgabe der obigen Form zu differenziiren, und wenn solches geschehen ist, wieder gehörig zu vertauschen. So erhält man unter andern folgende Differenziale:

α.) $\partial[\frac{1}{2}a^2(cz+z^2)] = \partial(\frac{1}{2}a^2x) = \frac{1}{2}a^2x^0\partial x = \frac{1}{2}a^2\partial z(c+2z)$, wegen $cz+z^2=x$.

β.) $\partial.(cz^2+z^3)^{\frac{1}{2}} = \partial(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\partial x = \dfrac{\partial x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{(2cz+3z^2)\partial z}{2(cz^2+z^3)^{\frac{1}{2}}}$, wegen $(cz^2+z^3)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$.

γ.) $\partial.(a^2-z^2)^{-\frac{2}{3}} = \partial(x^{-\frac{2}{3}}) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\partial x = -\dfrac{2\partial x}{3x^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{4z\partial z}{3(a^2-z^2)^{\frac{5}{3}}}$, wegen $a^2-z^2=x$.

δ.) $\partial.(a^2-z^{-3})^{-\frac{3}{2}} = \partial(x^{-\frac{3}{2}}) = -\dfrac{3\partial x}{2x^2\sqrt{x}} = -\dfrac{3(3z^{-4}\partial z)}{2(a^2-z^{-3})^2\sqrt{(a^2-z^{-3})}}$,

wegen $a^2 - \dfrac{1}{z^3} = x$.

Anmerkung. Betrachtet man ein jedes dieser ersten Differenziale genauer, so leuchtet es bald ein, daſs die zweiten und höhern vermittelst dieses Verfah-

rens nicht unmittelbar zu finden sind; weil durch die erste Differenziation im Zähler und Nenner zweierlei Functionen von z entstehen, welche x nicht zugleich vorstellen kann. Unter δ z. B. ist im Zähler $fz = z^{-4}$, im Nenner aber $fz = \left(a^2 - \frac{1}{z^3}\right)^{\frac{5}{2}}$; oder wenn im Anfange $\frac{1}{(a^2 - \frac{1}{z^3})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ gesetzt wurde, so kann nach der ersten Differenziation nicht mehr $\frac{1}{z^4 (a^2 - \frac{1}{z^3})^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ gesetzt werden; weil die letztere fz ganz verändert ist. Man kann daher nicht aus $\partial^2 . (a^2 - z^{-3})^{-\frac{3}{2}} = \partial^2 (x^{-\frac{3}{2}})$, unter der Bedingung, daſs $a^2 - z^{-3} = x$ genommen werden soll, ein richtiges Resultat erwarten.

IV. Differenziation einer veränderlichen Gröſse $y = xz$.

1. Für das erste Differenzial ist die Hauptreihe einerseits $= y$, $y + \partial y$, $y + 2\partial y$ ...... andererseits $= xz$, $(x + \partial x)(z + \partial z)$, $(x + 2\partial x)(z + 2\partial z)$ ....

Die Differenzen dieser Producte sind

$x\partial z + z\partial x + \partial x\partial z$, $x\partial z + z\partial x + 3\partial x\partial z$, $x\partial z + z\partial x + 5\partial x\partial z$, $x\partial z + z\partial x + 7\partial x\partial z$, ...

Durch Absonderung ihres unbeständigen Theils werden sie Differenziale und man erhält $\partial y = x\partial z + z\partial x$. Wären x und z mit einem beständigen Exponenten der Potenz behaftet, z. B. mit n und p, so ist leicht einzusehen, daſs die Absonderung des unbeständigen Theils der Differenzen das Differenzial $px^n z^{p-1}\partial z + nz^p x^{n-1}\partial x = \partial y$ geben müsse.

2. Um ein zweites Differenzial zu erhalten, ist folgende erste Differenzen-Reihe nöthig: $x\partial z + z\partial x$, $(x + \partial x)\partial z + (z + \partial z)\partial x$, $(x + 2\partial x)\partial z + (z + 2\partial z)\partial x$, u. s. w.

Hieraus folgt $\partial^2 y = 2\partial x\partial z$. Wenn aber $y = x^n z^p$ seyn soll, so muſs die erste Differenzen-Reihe folgende Gestalt haben:

$$p\partial z . x^n z^{p-1} + n\partial x . z^p x^{n-1},\ p\partial z (x + \partial x)^n (z + \partial z)^{p-1} + n\partial x (x + \partial x)^{n-1} (z + \partial z)^p,$$
$$p\partial z (x + 2\partial x)^n (z + 2\partial z)^{p-1} + n\partial x (x + 2\partial x)^{n-1} (z + 2\partial z)^p, \ldots\ldots$$

Die Entwickelung und Subtraction dieser Glieder giebt die veränderlichen Differenzen-Theile $n(n-1)px^{n-2}z^{p-1}\partial x^2\partial z$, $4n(n-1)px^{n-2}z^{p-1}\partial x^2\partial z$, $9n(n-1)px^{n-2}z^{p-1}\partial x^2\partial z$ u. s. w., ingleichen $np(p-1)x^{n-1}z^{p-2}\partial x\partial z^2$, ... $16np(p-1)x^{n-1}z^{p-2}\partial x\partial z^2$, ... nach deren Absonderung der beständige Theil oder das Differenzial $\partial^2 y = n(n-1)x^{n-2}z^p\partial x^2 + p(p-1)x^n z^{p-2}\partial z^2 + 2npx^{n-1}z^{p-1}\partial x\partial z$ übrig bleibt, welches auch erhalten wird, wenn man $p\partial z(x^n z^{p-1}) + n\partial x(x^{n-1}z^p)$ auf die bekannte

Art, mit Anwendung der vierten und zehnten Regel aus der Einleitung differenziirt. Hiebei ist die Bemerkung nöthig, daſs die Regel der gemeinen Infinitesimal-Rechnung, die höhern Potenzen des Unendlich-Kleinen müssen gegen die niedern wegfallen, für die Differenziation wohl in mehreren Fällen sehr unsicher seyn dürfte. Welches sind hier die höhern Potenzen, ∂x^2, ∂z^2 oder $\partial x \partial z$? —— Aber nie kann die Regel irre führen, oder auch nur einen Zweifel an der Richtigkeit eines höhern Differenzials übrig lassen: Man sondere den unbeständigen Theil der entwickelten Glieder in der vorletzten Differenzenreihe ab, und behalte den beständigen zurück.

V. Differenziation der veränderlichen Gröſse $y = \frac{x}{z}$.

1. Die Gröſse $\frac{x}{z}$ könnte sich im Allgemeinen auf folgende Art verändern:

$$\frac{x}{z},\ \frac{x \pm \partial x}{z \pm \partial z},\ \frac{x \pm \alpha \partial x}{z \pm \beta \partial z},\ \frac{x \pm \acute{\alpha} \partial x}{z \pm \beta' \partial z}, \ldots\ldots$$

wobei $\alpha > 1$, $\acute{\alpha} > \alpha \ldots\ldots \beta > 1$, $\beta' > \beta$ seyn müſste. Unter dieser Voraussetzung erhält man, wenn die Reihe steigt, durch Abzug eines jeden vorhergehenden Gliedes vom nächstfolgenden, die Differenzen-Reihe:

$$\frac{z\partial x - x\partial z}{z^2 + z\partial z},\ \frac{(\alpha - 1) z\partial x - (\beta - 1) x\partial z + (\alpha - \beta) \partial x \partial z}{z^2 + (\beta + 1) z\partial z + \beta \partial z^2},$$

$$\frac{(\acute{\alpha} - \alpha) z\partial x - (\beta' - \beta) x\partial z + (\acute{\alpha}\beta - \alpha\beta') \partial x \partial z}{z^2 + (\beta + \beta') z\partial z + \beta\beta' \partial z^2}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn $\alpha = 2 = \beta$, $\acute{\alpha} = 3 = \beta'$ etc. gesetzt wird, so verschwinden die mit $\partial x \partial z$ behafteten Glieder, und es kommen die Differenzen

$$\frac{z\partial x - x\partial z}{z^2 + z\partial z},\ \frac{z\partial x - x\partial z}{z^2 + 3z\partial z + 2\partial z^2},\ \frac{z\partial x - x\partial z}{z^2 + 5z\partial z + 6\partial z^2} \ldots$$

zum Vorschein. Durch Absonderung der veränderlichen Theile in den Nennern erhält man das erste Differenzial $\partial y = \frac{z\partial x - x\partial z}{z^2}$.

2. Um das zweite Differenzial zu entwickeln, ist nur nöthig, beide Glieder des Zählers zu trennen, ∂x und ∂z als beständige Gröſsen zu behandeln, und die vorhergehende Differenzial-Form anzuwenden, welche mit der fünften Regel in der Einleitung völlig übereinstimmt. Das giebt

$$\partial^2 y = \partial \left(\frac{\partial x}{z}\right) - \partial \left(\frac{x\partial z}{z^2}\right) = \frac{2\partial z (x\partial z - z\partial x)}{z^3}.$$

Für die höheren Differenziale von $\frac{x}{z}$ gilt eben diese Regel, welche sich für jeden besondern Fall wieder durch die Entwickelung einer arithmetischen Reihe rechtfertigen läſst.

VI. Differenziation einer veränderlichen Gröſse $y = \log \text{nat}\, x$.

Der sehr häufige Gebrauch der Logarithmen legte dem Erfinder des Differenzialkalkuls die Frage ganz nahe, wie der Logarithm einer Gröſse verändert werde, wenn sie selbst einer Veränderung unterworfen ist. Es sey nun $y = \log n\, x$, so hat man die Reihen $y, y+\partial y, y+2\partial y, \ldots\ldots = \log n\, x, \log n\,(x+\partial x), \log n\,(x+2\partial x), \log n\,(x+3\partial x)$, u. s. w.

Der Abzug der beiden ersten Glieder auf jeder Seite giebt $\partial y = \log n\,(x+\partial x) - \log n\, x = \log n\left(1 + \frac{\partial x}{x}\right)$, und wenn die gewöhnliche logarithmische Reihe gebraucht wird,

$$\partial y = \frac{\partial x}{x} - \frac{\partial x^2}{2x^2} + \frac{\partial x^3}{3x^3} - \frac{\partial x^4}{4x^4} + \text{u. s. w.}$$

Zieht man das zweite Glied vom dritten ab, so kommt $\partial y = \log n\,(x+2\partial x) - \log n\,(x+\partial x) = \log n\left(1 + \frac{\partial x}{x+\partial x}\right)$. Hieraus entsteht für ∂y eine zweite Reihe, welche durch Auflösung eines jeden einzelnen Gliedes in eine besondere Reihe, und Addition des Gleichartigen, folgende Gestalt erhält:

$$\partial y = \frac{\partial x}{x} - \frac{3\partial x^2}{2x^2} + \frac{7\partial x^3}{3x^3} - \frac{16\partial x^4}{4x^4} \text{ u. s. w.}$$

Die Vergleichung dieser zweiten mit der vorhergehenden Reihe zeigt, daſs alle Glieder nach dem ersten unbeständig sind. Es ist also nöthig sie wegzuwerfen, um auf beiden Seiten einerlei Differenzial-Verhältnisse

$$\partial y : \partial y : \partial y \ldots\ldots = \frac{\partial x}{x} : \frac{\partial x}{x} : \frac{\partial x}{x} \ldots\ldots$$

zu erhalten. Aus diesem Grunde ist nun $\partial\,(\log n\, x) = \frac{\partial x}{x}$, oder ganz allgemein $\partial\,(\log n\, fx) = \frac{\partial\,.\,fx}{fx}$, wodurch die sechste Regel in der Einleitung gerechtfertigt wird. Das zweite und die höhern Differenziale von $\log n\, x$ findet man mit Hülfe der Form Num. V. z. B.

$\partial^2 \operatorname{logn} x = \frac{ox - \partial x \partial x}{xx} = -\frac{\partial x^2}{x^2}$, oder $\partial^2 [\operatorname{logn}(ax - x^2)] = -\frac{\partial x^2}{x^2} \cdot \frac{a(a-x)}{a^2 - 2ax + x^2}$

u. a. m., deren Richtigkeit sich durch die Entwickelung der benöthigten Reihen sehr leicht erweisen läſst.

§. 35.

Im vorhergehenden Paragraph ist gezeigt worden, daſs die so räthselhaft scheinende Absonderung gewisser Differenzentheile sich keinesweges auf ihrer unermeſslichen Kleinheit oder Nichtigkeit (Nullität) sondern auf ihrer Unbeständigkeit im Fortgange der Veränderung einer Gröſse, und auf der Nothwendigkeit stehender Differenziel-Verhältnisse, wie unter andern $\partial y : \partial y = \frac{\partial x}{x} : \frac{\partial x}{x}$ u. dgl. gründe. Betrachten wir die von der zweiten allgemeinen Hauptreihe §. 29 und 31 abhängigen Differenziale genauer: so wird sich eben derselbe Absonderungs-Grund veroffenbaren.

VII. Differenziation der veränderlichen Gröſse $y = a^x$.

1. Wird ein erstes Differenzial verlangt, so ist eine Folge der Glieder von a^x nöthig, wie sie am Ende des §. 31. vorkommt. Nun lassen sich alle auf das erste folgenden Glieder in Reihen auflösen, und man hat das

1 Glied $a^x = a^x$

2 . . . $a^x a^{\partial x} = a^x [1 + \partial x \operatorname{logn} a + \frac{1}{2} \partial x^2 (\operatorname{logn} a)^2 + \frac{1}{6} \partial x^3 \ldots\ldots]$

$= a^x + a^x \partial x \operatorname{logn} a + \frac{1}{2} a^x \partial x^2 (\operatorname{logn} a)^2 + \ldots\ldots$

3 . . . $a^x a^{2\partial x} = a^x + 2a^x \partial x \operatorname{logn} a + \frac{4}{2} a^x \partial x^2 (\operatorname{logn} a)^2 + \ldots\ldots$,

4 . . . $a^x a^{3\partial x} = a^x + 3a^x \partial x \operatorname{logn} a + \frac{9}{2} a^x \partial x^2 (\operatorname{logn} a)^2 + \ldots\ldots$

Zieht man jedes vorhergehende Glied vom nächstfolgenden ab, und wirft die unbeständigen Theile der Differenzen weg: so ist das Differenzial-Verhältniſs überall auf beiden Seiten gleich, wie es dem obigen zufolge seyn muſs, und $\partial y = a^x \partial x \operatorname{logn} a = a^x . \partial (\operatorname{logn} a^x)$. Hieraus geht die Richtigkeit der siebenten Regel in der Einleitung hervor.

2. Um ein zweites Differenzial zu erhalten, ist hier weiter nichts nöthig, als das erste Differenzial von a^x mit seinem beständigen Factor $\partial x \operatorname{logn} a$ nochmals zu multipliciren; denn es wird $\partial x \operatorname{logn} a . \partial (a^x) = a^x \partial x^2 (\operatorname{logn} a)^2$. Eben so gelangt man zu den dritten und folgenden Differenzialen z. B. $\partial^4 y = a^x \partial x^4 (\operatorname{logn} a)^4$ u. s. w. Uebrigens ist es nicht schwer, eine jede andere Function nach

dieser Form zu differenziiren. Unter andern hat man $\partial^2\left(\text{logn}\,\frac{a^x}{b^z}\right)=\partial^2(\text{logn}\,a^x - \text{logn}\,b^z)=a^x\partial x^2(\text{logn}\,a)^2 - b^z\partial z^2(\text{logn}\,b)^2$ u. dgl.

VIII. Differenziation der veränderlichen Gröſse $y=z^x$.

1. Soll die Veränderungs-Form der Hauptreihe ein erstes Differenzial geben, so müssen die nacheinander entstehenden Glieder folgende Gestalt haben:

$$z^x,\ (z+\partial z)^x.z^{\partial x},\ (z+2\partial z)^x.z^{2\partial x},\ (z+3\partial z)^x.z^{3\partial x},\ \text{u. s. w.}$$

Iedes auf das erste folgende Glied läſst sich in eine Reihe entwickeln, und man erhält das

1te Glied $z^x=z^x$

2te $(z+\partial z)^x z^{\partial x}=(z^x+xz^{x-1}\partial z+\frac{x(x-1)}{1.2}z^{x-2}\partial z^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}z^{x-3}\partial z^3+\ldots\ldots)$

$(1+\partial x\,\text{logn}\,z+\tfrac{1}{2}\partial x^2(\text{logn}\,z)^2+\tfrac{1}{6}\partial x^3(\text{logn}\,z)^3+\ldots\ldots.)$

3te $(z+2\partial z)^x.z^{2\partial x}=(z^x+2xz^{x-1}\partial z+\frac{4x(x-1)}{1.2}z^{x-2}\partial z^2+\frac{8x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$

$z^{x-3}\partial z^3+\ldots..)(1+2\partial x\,\text{logn}\,z+\tfrac{4}{2}\partial x^2(\text{logn}\,z)^2+\tfrac{8}{6}\ldots\ldots.)$

4te $(z+3\partial z)^x.z^{3\partial x}=(z^x+3xz^{x-1}\partial z+\frac{9x(x-1)}{1.2}z^{x-2}\partial z^2+\frac{27x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\ldots..)$

$(1+3\partial x\,\text{logn}\,z+\tfrac{9}{2}\partial x^2\ldots..)$ u. s. w.

Nimmt man aus jeder Parenthese die beiden ersten Glieder, weil die übrigen unbeständig werden, und multiplicirt sie miteinander: so kommt das

1te Glied $z^x=z^x$

2te $(z+\partial z)^x z^{\partial x}=z^x+z^x\partial x\,\text{logn}\,z+xz^x\frac{\partial z}{z}+xz^x\partial x\,\text{logn}\,z.\partial(\text{logn}\,z)$

3te $(z+2\partial z)^x z^{2\partial x}=z^x+2z^x\partial x\,\text{logn}\,z+2xz^x\frac{\partial z}{z}+4xz^x\partial x\,\text{logn}\,z.\partial(\text{logn}\,z)$.

4te $(z+3\partial z)^x z^{3\partial x}=z^x+3z^x\partial x\,\text{logn}\,z+3xz^x\frac{\partial z}{z}+9xz^x\partial x\,\text{logn}\,z.\partial(\text{logn}\,z)$.

Durch die Multiplication ist in diese Glieder nochmals ein unbeständiger Theil hineingebracht worden. Sondert man diesen ab, und subtrahirt hierauf das erste Glied vom zweiten, das zweite vom dritten u. s. w. so kommt das Differenzial $z^x\left(\partial x\,\text{logn}\,z+x\frac{\partial z}{z}\right)=z^{x-1}(z\partial x\,\text{logn}\,z+x\partial z)$ zum Vorschein und man hat auf beiden Seiten einerlei Differenzial-Verhältniſs $\partial y:\partial y=z^{x-1}(z\partial x\,\text{logn}\,z+x\partial z):z^{x-1}(z\partial x\,\text{logn}\,z+x\partial z)$. Eben dieses Differenzial giebt die siebente Regel

in der Einleitung, welcher zufolge $\partial(z^x) = z^x . \partial(\text{logn}\, z^x) = z^x (\partial x \,\text{logn}\, z + x . \partial[\text{logn}\, z])$ $= z^{x-1} (z \partial x \,\text{logn}\, z + x \partial z)$ ist. Ein Beweis von ihrer Zuverlässigkeit und Allgemeinheit.

2. Um ein zweites und noch höheres Differenzial von z^x zu finden, ist nur nöthig, das nächstvorhergehende den allgemeinen Regeln gemäſs zu differenziiren. Bei der gegenwärtigen Function würde $\partial^2 y = \partial(z^x \partial x \,\text{logn}\, z) + \partial(x z^{x-1} \partial z)$ seyn. Vermöge des oben festgesetzten Begriffs eines Increments und Decrements, müssen ∂x und ∂z hier als beständige Gröſsen angesehen werden. Folglich hat man $\partial^2 y = \partial x . \partial(z^x \text{logn}\, z) + \partial z . \partial(x z^{x-1}) = \partial x [z^x . \partial(\text{logn}\, z) + \text{logn}\, z . \partial(z^x)] + \partial z [x . \partial(z^{x-1}) + z^{x-1} . \partial(x)] = z^{x-1} \partial x [\partial z + \text{logn}\, z (z \partial x \,\text{logn}\, z + x \partial z)] + z^{x-1} \partial z [x \{\partial x \,\text{logn}\, z + (x-1) z^{-1} \partial z\} + \partial x]$. In diesem Differenzial kommt kein einziges Increment in der zweiten Potenz vor, woraus einleuchtet, daſs die Ordnung der Differenziale sich nicht immer an der Gestalt der Incremente erkennen läſst. Auch geht hieraus hervor, daſs es ein sehr seichter Grund ist, welchen die Theorie der Gränzverhältnisse und die künstliche Nullen-Rechnung für die Beständigkeit oder Veränderlichkeit der Differenzen ∂x, ∂y etc. annehmen, es komme darauf an, daſs durch ihre besondere Gestalt z. B. $\partial^2 y$, oder Potenz z. B. ∂x^2 u. s. f. die Ordnung eines Differenzials bestimmt werde. (Vergl. oben §. 20. Num. 10.)

§. 36.

Nachdem gezeigt worden ist, daſs die allgemeinen Differenzial-Formeln, oder die in der Einleitung aufgeführten zehn Regeln, jedes verlangte Differenzial zu finden, ihren alleinigen Grund in der Eigenschaft unbeständiger Gröſsen haben, theils arithmetische theils geometrische Reihen darzustellen: so kann man sich vollkommen davon überzeugt halten, daſs das gewöhnliche Verfahren der Differenzial-Rechnung, bei aller Kürze doch eben so viele Sicherheit gewähre, als wenn jede einzelne veränderliche Gröſse irgend einer Function, vorher mit ihrem Increment oder Decrement in eine Reihe aufgelöset, Reihe zu Reihe addirt oder von ihr subtrahirt, wie auch Reihe mit Reihe multiplicirt oder eine durch die andere getheilt, endlich aus allen besondern Reihen die benöthigte Haupt- oder Differenzen-Reihe gebildet und in dieser Glied für Glied von dem zunächstliegenden abgezogen werden sollte. Diese Ersparniſs der Arbeit ist kein geringer Vortheil, und ein Vorzug, welchen man dem leibnitzischen

Kalkul jederzeit hat einräumen müssen. Ueberdem lehret er, dafs die Absonderung einiger Differenzen-Theile eben so nothwendig, als in scharf bestimmte Gränzen eingeschlossen ist; denn beständige Theile dürfen hier niemals wegfallen. Um die Nothwendigkeit dieses Verfahrens einleuchtend zu machen, ist im vorhergehenden jede zu differenziirende Function einem Monomium gleich gesetzt worden, welches nach und nach in ein immer gröfser werdendes, jedoch nicht potenzirtes Binomium überging. Indessen das hätte auch ohne diese Verbindung, durch unmittelbare Differenziation einer jeden isolirten Function eingesehen werden können, blofs unter der Bedingung, dafs der oben aufgestellte Begriff eines Differenzials anerkannt werde, welches vermöge seiner Natur eine beständige Gröfse seyn mufs. Auch hätte sich anstatt des Monomiums jede andere Function zu einer solchen Differenzial-Vergleichung gebrauchen lassen, weil die Nothwendigkeit der Absonderung gewisser Theile auf beiden Seiten, um stehende Differenzial-Verhältnisse zu erhalten, eben so gut würde eingeleuchtet haben. Denn bei der Entwickelung der beiderseitigen gleichnamigen Glieder aus der Haupttreihe in ihre besonderen Reihen*), veroffenbart es sich sehr bald, welche Theile durchgehend beständig sind, und welche nicht. Indessen hat das Monomium den Vorzug, dafs es die Einsicht in die Natur der Sache erleichtert. Es ist nun ganz klar, dafs die Besorgnifs der Theorie der Gränz-Verhältnisse und analytischen Functionen höchst ungegründet gewesen sey, als würde den Differenzial-Verhältnissen und Differenzial-Gleichungen durch die Absonderung etwas an ihrer Richtigkeit benommen, da sie doch grade dadurch erst ganz richtig werden. Um jener irrigem Meinung willen machte man einerseits die Incremente zu unbegreiflichen Mitteldingen zwischen Etwas und Nichts, und stellte andererseits den Fundamental-Satz auf, der Binomialtheil i könne (d. h. müsse) jederzeit so klein genommen werden, dafs die Summe aller wegfallenden Glieder kleiner sey, als ihr zunächst vorhergehendes Glied.

---

*) Anmerkung. Die Hauptreihe in der Theorie der analytischen Functionen: $fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2 \cdot 3} f'''x \ldots$ ist für den leibnitzischen Differenzial-Kalkul nichts weiter, als eine besondere Reihe, nämlich die Entwickelung eines einzigen Gliedes aus der allgemeinen ersten oder arithmetischen Hauptreihe $x + (x + \partial x) + (x + m\partial x) + (x + m'\partial x) + \ldots\ldots$ wenn jedes Glied mit dem beständigen Exponenten n behaftet wird.

Aber abgesehen von der Ungewifsheit und Regellosigkeit in Hinsicht der Anzahl der wegzuwerfenden Glieder, welche beiden Theorien zum Vorwurfe gereichen, hat man durch dieses Verbesserungs-Mittel Gelegenheit gegeben, dafs grade das Gegentheil von demjenigen geschehen kann, was da geschehen soll. Denn wenn die Incremente so unbedeutend klein sind, dafs ihr Hinzukommen weder die veränderliche Gröfse selbst, noch den beständigen Theil der Differenz um irgend Etwas gröfser macht: so können alle die Glieder, welche der Differenzial-Kalkul absondern mufs, in den Differenzial-Gleichungen stehen bleiben; weil diese auf keiner Seite durch sie um Etwas zu grofs werden. Aber die überschüssigen Theile schaden hier desto mehr, je gröfser die Incremente sind; und eben deshalb müssen jene um so viel eher weggeworfen werden, wenn das Wachsthum einer veränderlichen Gröfse, z. B. in der bewegten Körperwelt, irgendwo augenblickliche Incremente so grofs wie den Halbmesser der Erde, oder wie den Quadranten ihres Meridians nöthig machen sollte. Man bedarf also keiner unendlich kleinen Incremente ∂x, ∂y, ∂z u. dgl. um das Verfahren des Differenzial-Kalkuls zu rechtfertigen; denn jedes Increment macht es nöthig, und zwar das gröfsere weit mehr, als das kleinere. Hiemit widerlegt sich die Beschuldigung von selbst, als hätte Leibnitz im Irrthum gesteckt, indem er absonderte, um richtige Differenzial-Verhältnisse und Differenzial-Gleichungen zu erhalten. Allerdings hat er sich öfter sehr kleiner Incremente und Decremente bedient, aber nur da, wo seine Tadler ebenfalls genöthigt sind, zu ihnen zu greifen.

Zweiter Abschnitt.

Darstellung der Integral-Rechnung, mit beständiger Hinweisung auf Leibnitzens mathematischen Nachlafs.

§. 37.

Integriren heifst, dem Sachbegriffe nach, zu einem vorgelegten Differenzial die veränderliche Gröfse finden, durch deren Differenziation es entstehen mufs, wenn es auch auf anderm Wege, z. B. durch die Betrachtung einer geometrischen Figur (vergl. §. 22. Num. 1.) wie etwa des Flächen-Elements einer archimedischen Spiral-Linie u. dgl. entstanden seyn sollte. Die

gesuchte veränderliche Gröſse ist, zufolge der Beschaffenheit der Differenziale, jederzeit das Anfangs-Glied einer Hauptreihe, zu welcher jene als beständige Differenzen oder Differenzentheile gehören. Wenn diese Erklärung noch irgend einem Zweifel unterworfen seyn könnte, so würde sie sich durch die von Leibnitzen selbst gegebene sehr leicht bestätigen lassen. Er nennt im Commerc. philos. et mathem. T. I. pag. 66 den „terminum ipsum" (d. i. integralem) auch „summam primam," und macht überall diese Stammgröſse zum Gegensatze des Differenzials. Hieraus geht nun unmittelbar hervor, daſs jede Integration oder Summation, wie sie anfangs hieſs, gewisse Regeln erfodere, um ein vorgelegtes Differenzial wieder in seine ursprüngliche Function verwandeln zu können. Kämen keine Differenziale von einer andern Gestalt vor, als diejenigen, welche man unmittelbar durch die acht vorhergehenden und weiter unten folgenden ganz allgemeinen Differenzial-Formeln erhält: so würde die Integration keine schwierige Arbeit seyn, und kaum etwas anders nöthig machen, als das Abschreiben der einer jeden besondern Differenzial-Form zugehörigen veränderlichen Stammgröſse, und ausser diesem noch das Hinzufügen einer unbestimmten beständigen Gröſse, als welche bei der Differenziation einer Function = o geworden seyn könnte, und ebenfalls wieder hergestellt werden müſste, um das Integrum der Function zu erhalten. Indessen die Differenziale haben in den angewandten Theilen der höhern Analysis einen so mannichfaltigen Ursprung, auch werden die vermittelst der allgemeinen Differenzial-Formeln unmittelbar entstehenden, während des Ganges mancher analytischen Rechnungen dergestalt verändert, daſs die obigen Ausdrücke gar nicht als Wegweiser gebraucht werden können, gradehin zu dem gesuchten Integral zu gelangen. Hätte z. B. irgend ein Rechnungsfall die Verbindung $z^x \partial x$ gegeben, so ist das schon eine Form, welche durch die Differenziation von z^x allein, nicht zum Vorschein kommen kann. Wäre hier anstatt der veränderlichen Gröſse z eine beständige a mit dem Exponenten x behaftet: so würde $\int a^x \partial x = \frac{a^x}{\operatorname{logn} a}$ seyn müssen. Aber ein $\frac{z^x}{\operatorname{logn} z}$ kann nicht für das Integral von $z^x \partial x$ angesehen werden; weil die Differenziation dieser Function den Ausdruck

$$\frac{z^{x-1}[z\partial x\,(\operatorname{logn} z)^2 + \partial z(x \operatorname{logn} z - 1)]}{(\operatorname{logn} z)^2}$$

hervorbringt. Hier entsteht also gleich das Bedürfniſs einer Integrationsweise, zu welcher die obigen acht Differenzial-Formeln keine unmittelbare Anleitung geben. Da Fälle dieser Art im höhern Kalkul sehr oft vorkommen, so ist es leicht begreiflich, wie wünschenswerth eine allgemeine Methode seyn muſs, jedes Differenzial auf dem kürzesten Wege zu integriren. Leibnitz hat in seinem Briefwechsel mit Joh. Bernoulli öfter an sie gedacht, und der letztere scharfsinnige Gelehrte glaubte ihr einmal auf der Spur zu seyn (Comm. philos. T. I. pag. 66.); indessen wenn man bedenkt, daſs eine allgemeine Form der Integration bloſs aller ersten Differenziale, schon eine sehr viel sagende Aufgabe ist, und daſs diese dem Differenzial-Kalkul noch lange nicht genügt; weil er zugleich eine allgemeine Integrations-Methode für alle möglichen Differenziale der höhern Ordnung bedarf, indem auch diese in verschiedenen Rechnungen mit veränderlichen Gröſsen erfodert werden: so möchte man mit Leibnitzen wohl zweifeln *), ob eine solche allgemeine Methode in der weitesten Bedeutung möglich sey. Es ist hier der Ort nicht, diesen wichtigen Gegenstand weiter zu untersuchen, sondern es kommt für jetzt nur darauf an, ausser der bereits oben gerechtfertigten Absonderung der veränderlichen Differenzentheile, noch einen andern Grund von ihr nachzuweisen, welchen der Erfinder des Differenzial-Kalkuls für sehr wichtig gehalten hat. Denn er macht in mehrern seiner mathematischen Aufsätze aufmerksam darauf, daſs Differenziation und Integration mit dem Potenziren und Wurzel-Ausziehen etwas Aehnliches haben, und gesteht sogar, daſs dieses gegenseitige Verhalten der Glieder in der Hauptreihe und ihrer Differenzen, die erste Veranlassung zu seiner Erfindung gewesen sey. Es ist wohl nicht überflüssig, hier ein Paar merkwürdige Stellen herzusetzen, welche das Ebengesagte bestätigen können. Der Aufsatz: Specimen novum Analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas in den Actis Erud. Lips. 1702 fängt sich folgendermaſsen an: „Ut in Algebra reciprocae sibi sunt Potentiae et Radices, ita in calculo infinitesimali Differentiae et Summae: et uti in Algebra seu scientia generali finitae magnitudinis, potissimus scopus est, extrahere radi-

---

*) Commerc. philos. et math. T. I. pag. 49.

ces formularum *), ita in scientia infiniti **) invenire summas serierum; quae cum ex terminis constant continue seu elementariter crescentibus, nihil aliud sunt, quam quadraturae, vel areae figurarum." Etwas Aehnliches kommt vor in den Operibus omn. T. III. pag. 421: „Ut cujus libet quantitatis facile est invenire potentiam, ita cujuslibet certa lege variantis possumus invenire differentiam seu elementum. Sed regressus a potentia ad radicem per extractionem et regressus a differentia ad terminum (das erste Glied in der Hauptreihe) per summationem non semper in potestate est" u. s. w. Im Jahr 1706 war Leibnitz noch abgeneigt, die von Joh. Bernoulli gebrauchte Benennung Integral-Rechnung seiner selbstgewählten Benennung Summations-Rechnung vorzuziehen, und schrieb darüber folgende merkwürdigen Worte (im Comm. philos. Tom. II. pag. 161) nieder: „Equidem semper opposui differentias et summas, ∂ et $\int$, ita ut $\int \partial x$ sit x, et $\partial \int x \partial x$ sit $x \partial x$. Ita $\int$ et ∂ conjuncta se mutuo tollunt. Imo summae me differentialis calculi admonuere, eaque methodi meae clavis fuit; cum in seriebus numericis hanc reciprocationem deprehendissem, eaque arte summassem multas series antea non summatas." Obgleich diese Bemerkungen zum Theil nur die Anwendung der Differenzial-Rechnung auf Geometrie, und solche Differenziale angehen, die durch unmittelbare Betrachtung einer geometrischen Figur entstehen: so liegt doch etwas ganz Allgemeines in ihnen, was besonders bei der ersten leibnitzischen allgemeinen Hauptreihe §. 31. sehr leicht in die Augen fällt, und über den Mechanismus des Differenzial-Kalkuls einen wichtigen Aufschluſs giebt. Es läſst sich nämlich die ursprüngliche Function, oder besser die einfache Stammgröſse x in zwei entgegengesetzten Zuständen betrachten: der eine von beiden ist Uebergang des Monomiums zum Binomium, der andere hingegen Rückgang vom Binomium zu dem anfänglichen Monomium. Diese verhalten sich in der That wie Potenziren und Wurzel-Ausziehen; denn man kann sogar auf die einfachste Form der in dieser Reihe vorkommenden Veränderung, vorwärts und rückwärts, das heiſst differenziirend und integrirend den binomischen Lehrsatz anwenden.

---

*) Anmerkung. Iede Auflösung einer gemischten Gleichung vom zweiten, dritten und höhern Grade ist nichts anders, als das Ausziehen der Wurzeln der Gleichung, oder das Aufsuchen der Werthe von der unbekannten Gröſse.

**) Das heist derjenigen Gröſsen, welche fortlaufende und mehrentheils algebraisch unbegranzte Reihen bilden.

§. 38.

I. Der einfachste Uebergang der veränderlichen Gröſse x aus dem Zustande des Monoms in den Zustand des Binoms ist:

$$x, \ x \pm \partial x, \ x \pm 2\partial x, \ x \pm 3\partial x \text{ u. s. w.}$$

Ieder Zuwachs oder jede Abnahme als Binomium betrachtet, giebt nun, Glied für Glied in eine Binomialreihe verwandelt, folgende Gröſsen:

$$x \pm 1 . x^0 \partial x + 0 . x^{-1}\partial x^2 \pm 0 . x^{-2}\partial x^3 \ldots\ldots$$
$$x \pm 2 . x^0 \partial x + 0 . x^{-1}\partial x^2 \pm \ldots\ldots$$
$$x \pm 3 . x^0 \partial x + 0 . x^{-1}\partial x^2 \pm \ldots\ldots$$

Durch den Abzug jeder vorhergehenden Reihe von der nachfolgenden entsteht hier das Differenzial $\pm x^0\partial x$. Um die Integration zu verrichten, muſs man von dem übrig gebliebenen Theile der Potenz, also von dem Zustande des Binoms in den Zustand des Monoms zurückkehren. Das Verlangte ist hier das erste Binomial-Glied aus $(x \pm \partial x)^1$. Da es zufolge des binomischen Satzes, im zweiten Gliede der Potenz mit einem um 1 verminderten Exponenten steckt, und übrigens keinen Coefficienten bei sich haben darf: so geht aus diesen Bedingungen ganz natürlich die Regel hervor:

Man vermehre den Exponenten um 1, und dividire zugleich durch diesen um 1 vermehrten Exponenten, wie auch durch ∂x, das zweite Binomial-Glied (Differenzial): so fällt einerseits der vom ersten Gliede sich herschreibende Coefficient, andererseits der zweite Binomialtheil (das Increment) weg, und es erscheint x^1 wieder.

Was die höheren Differenziale in diesem einfachsten Fall betrifft, so kann $\partial^2 x$, $\partial^3 x$ u. s. w. bloſs aus dem Monomium x entstehen, folglich auch die umgekehrte Verrichtung immer nur zu diesem zurückführen.

II. Noch näher dem eigentlichen Gegenstande der Betrachtung bringt uns die veränderliche Gröſse, wenn sie in der zweiten Potenz aus dem Zustande des Monoms in den Zustand eines Binoms übergeht, und aus diesem in jenen zurücktritt. Die Form ihrer Veränderung, in Beziehung auf ein erstes Differenzial, ist jetzt folgende:

$$x^2 + (x \pm \partial x)^2 + (x \pm 2\partial x)^2 + (x \pm 3\partial x)^2 + \ldots\ldots$$

Man erhält hier die Binomial-Reihen

$$x^2 \pm 0 \,.\, x\partial x + 0 \,.\, x^0 \partial x^2 \pm 0 \,.\, x^{-1} \partial x^3 \ldots\ldots$$
$$x^2 \pm 2x\partial x + x^0 \partial x^2 \pm 0 \,.\, x^{-1} \partial x^3 \ldots\ldots$$
$$x^2 \pm 4x\partial x + 4x^0 \partial x^2 \pm 0 \,.\, x^{-1} \partial x^3 \text{ u. s. f.}$$

nebst den Differenzen $\pm 2x\partial x + x^0 \partial x^2$ und $\pm 2x\partial x + 3x^0 \partial x^2$. Beim Integriren soll aus diesen der erste Theil der Potenz allein, also ein Monomium und keine Binomial-Wurzel, wie etwa $x \div \partial x$, gefunden werden*). Es sind aber zwei Glieder vorhanden, aus deren jedem sich ein x^2 nach einer gewissen Regel herstellen läſst. Das würde zufolge der Aehnlichkeit unter Num. I., entweder ein $x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$, oder ein $x^2 + \frac{3}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2$, also ein falsches Integral geben. Um diesen Fehler zu verhüten, fodert nun das Gesetz des Kalkuls, daſs aus einem von beiden Gliedern der Differenz Nichts hergestellt, oder daſs es mit dem Coefficienten Null versehen werde. Die Wahl fällt keinen Augenblick schwer, ob man die Differenzial-Form

$$0 \,.\, 2x\partial x + \tfrac{1}{3}\} \, x^0 \partial x^2, \text{ oder}$$
$$2x\partial x + \tfrac{0}{0} : \tfrac{1}{3}\} \, x^0 \partial x^2$$

einführen solle; denn das erste von beiden Gliedern ist wesentlich nöthig, theils als erstes Differenzial, theils als erzeugendes Anfangs-Glied (differentia generans prima) für die folgenden Differenziale, die sich aus den unbeständigen dritten Binomial-Gliedern nicht übereinstimmend entwickeln lassen. Um dieser Gründe willen muſs das zweite Differenzen-Glied in der x^2 zugehörigen Reihe grade so algorithmisch nothwendig, wie die nach ihm noch folgenden Binomial-Glieder Null werden; weil sonst ein Irrthum in das Integral kommen würde. Bei dem zweiten Differenzial von x^2 ist derselbe algorithmische Zwang vorhanden, sofern es zuförderst nach der Form $\int 2\,(2-1)\, x^{2-2} \partial x^2 = \frac{2.1}{1}\, x^1 \, \frac{\partial x^2}{\partial x}$ integrirt werden muſs, um $2x\partial x + 0$, und aus dieser Infinitesima prima dann $x^2 + 0$ zu erhalten. Es ist wohl nicht undienlich hiebei zu erinnern, daſs bei dem Ausziehen der Wurzeln, wo man zwei Binomial-Theile verlangt, etwas ganz Aehnliches Statt findet. Nämlich wenn eine Gleichung $x^2 \pm ax + \frac{a^2}{4}$ u. dgl. vorkommt, so schreibt der Kalkul die Regel vor:

---

*) Im Comm. philos. T. II. pag. 295, tadelt Joh. Bernoulli den Newton, daſs er 1712 noch die Meinung gehegt habe, das Integriren sey ein wirkliches Ausziehen der Wurzel.

Man gebe dem zweiten Gliede den Coefficienten Null, und nehme von beiden äussern die erste Potenz.

Bei einer vollständigen kubischen Gleichung, würde zwei, bei einer biquadratischen drei Glieder u. s. f. das Loos treffen, mit einem Coefficienten Null versehen werden zu müssen. Diesemnach kann das, was die Integration hier vorschreibt, um sich den Rückweg vom zweiten Binomial-Gliede zum ersten zu sichern, gar nicht als etwas Einziges in seiner Art angesehen werden; denn es kommt im niedern Kalkul ebenfalls vor.

III. Betrachten wir nun die allgemeinste Gliederform (Veränderungs-Form) der allgemeinen Hauptreihe Num. I., nämlich

$$x^n + (x \pm \partial x)^n + (x \pm m\partial x)^n + (x \pm m'\partial x)^n + \ldots.$$

so giebt jedes Glied nach dem ersten eine Binomial-Reihe:

$$x^n \pm nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 \pm \ldots..$$

$$x^n \pm mnx^{n-1}\partial x + \frac{mmn(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 \ldots\ldots$$

und der erste Abzug die Differenz

$$\pm nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}\partial x^3 \text{ u. s. f.}$$

Bleiben wir bloſs bei dieser ersten Differenz stehen, ohne uns einmal an die Unbeständigkeit einiger Glieder zu kehren: so findet sich schon ein hinreichender Grund alles wegzuwerfen, was auf das erste Glied $nx^{n-1}\partial x$ folgt. Denn um das Integral herzustellen, müssen die Glieder

$$\frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\partial x^2, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}\partial x^3 \text{ u. s. w.}$$

mit dem Coefficienten Null versehen werden. Sollte dies nicht gleich beim Differenziiren geschehen, und zwar aus der leeren Besorgniſs, die Differenzial-Gleichung würde sonst unrichtig werden: so müſste doch ein jedes mit dem Coefficienten Null zu versehende Glied ein Wahrzeichen, etwa ein Sternchen u. dgl. bekommen, damit es während der ganzen Rechnung als nicht vorhanden betrachtet, und bei jeder eintretenden Combination überschlagen würde, um zu verhüten, daſs am Ende ein ganz falsches Integral zum Vorschein komme. Aber anstatt sich mit so ganz unnützen Gliedern herumzuschleppen, die auf das

Integral gar keinen Einfluſs haben können oder dürfen, wirft man sie lieber gleich bei der Differenziation weg, weil dies die Rechnung nicht nur bequemer macht, sondern auch vor leicht einschleichenden Fehlern sicher stellt. Man sieht nun klar genug ein, daſs das Gebot der Absonderung einiger Differenzentheile hier von der Integral-Rechnung ausgeht, anstatt daſs es oben auf der Uebereinstimmung der Differenzial-Verhältnisse und Differenzial-Gleichungen beruhete. Uebrigens liegt sowohl hier, als dort das gegenseitige Verhalten der Monomien und Binomien dem Wegwerfen einiger Differenzen-Theile zum Grunde. Dabei ist kaum nöthig zu erinnern, daſs nicht bloſs die einfachsten Functionen, sondern auch die zusammengesetztesten, immer durch die Differenziation aus einem monomischen Zustande in einen binomischen übergehen, durch die Integration aber den Rückweg machen. Denn da jede einzelne in der Function enthaltene veränderliche Gröſse diesem Gesetze unterworfen ist: so muſs es auch eben darum die ganze Function seyn, wie z. B. an $\partial\left(\frac{x}{y}\right)$ oder $\partial\,(z^x)$ zu sehen ist.

§. 39.

IV. Die Integration des Differenzials $\partial(ax+x^2) = a\partial x + 2x\partial x + 0.\partial x^2$, kann unter einigen algorithmischen Abänderungen das im vorhergehenden Paragraph Gesagte nicht nur erläutern, sondern auch zum Beweise dienen, daſs die um der Integration willen erfoderliche Vernichtung der unbeständigen Differenzentheile, der Schärfe des Kalkuls nicht den mindesten Abbruch thut. Denn was in jedem ursprünglichen oder unmittelbaren (durch unmittelbare Differenziation entstandenen) Differenzial als überflüssig weggeworfen werden muſs, um ein richtiges Integral zu erhalten, das bleibt auch für jede nachherige oder mittelbare Verbindung überflüssig, welche das erstere während der Rechnung eingehen kann.

1. Wenn ein besonderer Fall nöthig macht, das oben vorgelegte Differenzial noch mit einer veränderlichen Gröſse, z. B. mit x zu multipliciren: so führt $ax\partial x + 2x^2\partial x$, ohne das Glied $x\partial x^2$, auf das wahre Integral $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3}x^3$ zurück. Denn es ist leicht genug einzusehen, daſs bei der Differenziation nicht $ax\partial x$, aber ganz nothwendig $x\partial x^2$ als Glied in die Binomial-Reihen von $\frac{2}{3}(x+\partial x)^3$, $\frac{2}{3}(x+2\partial x)^3$ u. s. w. gehört. Man hat nämlich das

1. Gl. $\frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{3}x^3 + 0 + 0 + 0$

2. Gl. $\frac{2}{3}(x + \partial x)^3 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\partial x + 2x\partial x^2 + \frac{2}{3}\partial x^3$

3. Gl. $\frac{2}{3}(x + 2\partial x)^3 = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2\partial x + 8x\partial x^2 + \frac{16}{3}\partial x^3$

4. Gl. $\frac{2}{3}(x + 3\partial x)^3 = \frac{2}{3}x^3 + 6x^2\partial x + 18x\partial x^2 + \frac{54}{3}\partial x^3$ etc.

Die Differenzen sind nacheinander: $2x^2\partial x + 2x\partial x^2 + \frac{2}{3}\partial x^3$; $2x^2\partial x + 6x\partial x^2 + \frac{14}{3}\partial x^3$; $2x^2\partial x + 10x\partial x^2 + \frac{38}{3}\partial x^3$ u. s. f. Daſs hier das dritte Glied $2x\partial x^2$ anstatt des obigen $x\partial x^2$ erscheint, berechtigt keinesweges zu dem Zweifel, ob auch wohl $x\partial x^2$ als ein wirkliches Binomialglied in den aus $\frac{2}{3}x^3$ entstehenden Reihen anzusehen sey. Denn wenn man auf das anfängliche unmittelbare Differenzial $2x\partial x + \partial x^2$ Rücksicht nimmt, leuchtet sogleich ein, daſs ∂x^2 ein unbeständiges Glied ist, und der Coefficient $= 1$ ihm gar nicht nothwendig zukommt, indem er auch 3, 5, 7 u. dgl. seyn kann. Wird nun einmal $2x\partial x + 3\partial x^2$ anstatt $2x\partial x + \partial x^2$ mit x multiplicirt, so kommt das mittelbare Differenzial $2x^2\partial x + 3x\partial x^2$ hervor, und das unmittelbare von $\frac{2}{3}x^3$ ist $2x^2\partial x + 2x\partial x^2$, wo $2x\partial x^2$ zwischen den Gränzen $x\partial x^2$ und $3x\partial x^2$ liegt, sich auch der Binomial-Fortschreitung $2x^2\partial x + \frac{1}{3}\} x\partial x^2$ mehr nähert, als irgend eine andere Combination z. B. $(x + \frac{2}{3}\partial x)^3$ oder $(\frac{1}{3}x + \partial x)^3$ u. dgl. Hieraus folgt unläugbar, fürs Erste: das mit ∂x^2 behaftete Glied, welches in dem unmittelbaren Differenzial $2x\partial x + 0 . \partial x^2$, um der Integration willen vernichtet werden muſste, wird in keinem mittelbaren Differenzial ein unverwerflicher Theil desselben; fürs Zweite: es ist nicht

$$a\int x\partial x + 2\int x^2\partial x + \frac{1}{3}\}\int x\partial x^2, \text{ sondern}$$

$$a\int x\partial x + 2\int x^2\partial x + \frac{0}{0} : \frac{1}{3}\}\int x\partial x^2 \text{ das wahre Integral.}$$

2. Wenn ein Rechnungsfall vorkommt, wo $a\partial x + 2x\partial x + 0 . \partial x^2$ mit dem Increment einer veränderlichen Gröſse, z. B. mit ∂x multiplicirt werden muſs, so ist in dem mittelbaren Differenzial $ax^0\partial x^2 + 2x\partial x^2 + 0 . x^0\partial x^3$ das letzte Glied eben darum zu vernichten, weil es in der unmittelbaren Differenzial-Function bereits ein integralisches Null, das heiſst ein Theil war, aus welchem für das Integral schlechterdings Nichts wieder hergestellt werden durfte. Sehen wir daher die beiden ersten Glieder als eigentliches Differenzial an, so ist nicht zu verkennen, daſs es einerseits zur zweiten Ordnung gehöre, und andererseits nicht verstatte, $a\partial x^2$ als ein Glied zu betrachten, welches von $2x\partial x^2$ binomisch abhängig seyn könnte. Daher das Integral $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0 . \int x^0\partial x^3$ seyn muſs; denn wenn das erste Differenzial von $\frac{1}{3}x^3$ als das Anfangsglied einer gliederweise

potenzirten Reihe vom ersten Range nochmals differenziirt wird: so erhält man $\partial x . \partial (x^2) + \partial x . \partial (x + \partial x)^2 + \partial x . \partial (x + 2\partial x)^2$ u. s. w., das heisst die einzelnen Glieder

$$x^2 \partial x$$
$$x^2 \partial x + 2x\partial x^2 + \partial x^3$$
$$x^2 \partial x + 4x\partial x^2 + 4\partial x^3$$
$$x^2 \partial x + 6x\partial x^2 + 9\partial x^3 \text{ u. s. w.}$$

Das erste Glied vom zweiten abgezogen, giebt die Differenz $2x\partial x^2 + \partial x^3$ ganz übereinstimmend mit dem durch algorithmische Combination entstandenen mittelbaren Differenzial, und beweiset die Richtigkeit des Kalkuls unter der Voraussetzung, daſs kein Glied, welches in einem unmittelbaren Differenzial integralisch Null werden muſs, in einem mittelbaren Differenzial noch einen Einfluſs auf das Integral des letztern habe. Es ist nicht schwer, diesen Satz ganz allgemein zu erweisen, wenn man sich der allgemeinen Form einer jeden Hauptreihe, und besonders in der ersten des Binoms $(x + m\partial x)^n$ bedient.

§. 40.

V. Dagegen darf keine mittelbar entstandene Differenzial-Function irgend ein Glied wegwerfen, wenn die neue Verbindung lauter wesentliche Differenzial-Theile in sich schlieſst. Man nehme z. B. die Coordinaten einer graden Linie mit ihren Differenzialen: so entsteht die Proportion $x : y = \partial x : \partial y$, oder die Gleichung $y\partial x = x\partial y$, in welcher jeder Theil schon ein mittelbares Differenzial ist. Schriebe irgend eine analytische Behandlung vor, ein $y\partial x$ auf beiden Seiten zu addiren, wie im gleichschenkligen Dreieck, wo das Flächen-Element gedoppelt vorhanden ist: so müſsten in $2y\partial x = x\partial y + y\partial x$ nothwendig alle Theile als wesentlich angesehen werden, weil keiner für sich ein integralisches Null ist. Die Integration giebt hier $2\int y\partial x = xy$, oder wenn die eine rechtwinkelige Hälfte des Dreiecks genommen wird, $\int y\partial x = \frac{1}{2}xy$.

VI. Es fällt von selbst in die Augen, daſs die gegenseitige Abhängigkeit der unmittelbaren und mittelbaren Differenziale zuweilen benutzt werden kann, eine Differenzialgleichung zum Theil zu integriren, indem man ihr eine veränderte Gestalt giebt. So läſst sich z. B.

$$a^y \partial y = \frac{2x\partial x \operatorname{logn} y^y + x^2 \partial y}{y^2} \text{ in folgende verwandeln,}$$

$a^y y \partial y = 2x\partial x \operatorname{logn} y + x^2 \frac{\partial y}{y}$, aus welcher man das Integral erhält: $\int a^y y \partial y = x^2 \operatorname{logn} y$.

VII. Betrachtet man das Differenzial $a^y y \partial y$ ausser aller Verbindung, so läſst sich annehmen, daſs während der Rechnung ein Theil davon verloren gegangen, und es in diesem Zustande nur ein mittelbares Differenzial ist. Dies führt auf eine leichte Integration; denn man kann es als den einen Theil eines Differenzials von dem Producte zweier veränderlichen Gröſsen ansehen, wo das Increment ∂y entweder dem a^y oder dem y angehört. Im erstern Fall müſste die Differenziation gegeben haben

$$a^y \partial y \,.\, y + \frac{a^y \partial y}{\operatorname{logn} a} - \frac{a^y \partial y}{\operatorname{logn} a}; \text{ im letztern aber}$$

$a^y . y\partial y + \frac{1}{2} y^2 . a^y \partial y \operatorname{logn} a - \frac{1}{2} y^2 . a^y \partial y \operatorname{logn} a$.

Von den negativen Gliedern ist $-\frac{a^y \partial y}{\operatorname{logn} a}$ für sich integrabel, daher die erstere Verbindung der letztern vorzuziehen, wodurch man das Integral

$$\frac{a^y y}{\operatorname{logn} a} - \frac{a^y}{(\operatorname{logn} a)^2} = a^y \left[\frac{\operatorname{logn} a^y - 1}{(\operatorname{logn} a)^2}\right] + C,$$

und wenn für $y = 0$ ein Werth $= 0$ Statt findet, das vollständige Integral

$$a^y \left[\frac{\operatorname{logn} a^y - 1}{(\operatorname{logn} a)^2}\right] + \frac{1}{(\operatorname{logn} a)^2}$$

erhält. Indessen darf doch in so zweideutigen Fällen dasjenige Integral, welches am leichtesten zu entwickeln ist, wohl nicht immer als das einzig richtige angesehen werden. Es bleibt also noch die zweite Differenzial-Function zu integriren übrig. Diese ist offenbar einerlei mit $\partial(\frac{1}{2} a^y y^2) - \partial \int a^y y \partial y$, folglich das verlangte Integral $C + \frac{1}{2} a^y y^2 - \int a^y y \partial y$.

Hier läſst sich die bekannte Methode anwenden, einen Theil der Differenzial-Function in eine unendliche Reihe aufzulösen; denn es ist $a^y = 1 + y \operatorname{logn} a + \frac{1}{2}(y \operatorname{logn} a)^2 + \frac{1}{6}(y \operatorname{logn} a)^3 + \text{etc.}$ Das giebt, wenn mit $y\partial y$ multiplicirt und jedes Glied für sich integrirt wird, $-\int a^y y \partial y = -y^2 [\frac{1}{2} + \frac{1}{3} y \operatorname{logn} a + \frac{1}{8}(y \operatorname{logn} a)^2 + \frac{1}{30}(y \operatorname{logn} a)^3 + \ldots\ldots]$

Hätte man die obige Differenzial-Function ohne die vorhergehenden Rücksichten integrirt, so würde $\int a^y y \partial y = y^2 [\frac{1}{2} + \frac{1}{3} y \operatorname{logn} a + \frac{1}{8}(y \operatorname{logn} a)^2 + \frac{1}{30}(y \operatorname{logn} a)^3 + \ldots\ldots]$ gekommen seyn. Das sind drei verschiedene Integrale von

einem und demselben Differenzial, wo natürlich die Frage entstehen muſs, welches das rechte sey. Es kommt glücklicherweise nur selten vor, daſs in der Form der Differenziale eine solche Zweideutigkeit liegt; aber man sieht hieraus, was für ein bedeutender Unterschied zwischen mittelbaren und unmittelbaren Differenzial-Functionen Statt findet. Die letztern können gradezu keine solche Unbestimmtheit hervorbringen: daher auch bei ihnen der Rückgang zur Hauptfunction an sich nie schwierig seyn kann, wenn man nur ihre Unterscheidungsmerkmale gehörig in Acht nimmt, wozu jedoch eine nähere Bekanntschaft mit verschiedenen zusammengesetzteren Gestalten derselben, oder eine mannichfaltige Uebung im Differenziiren von allerlei mehrgliedrigen Functionen, theils nöthig theils zu empfehlen ist.

VIII. Da aus dem Vorhergehenden einleuchtet, daſs verschiedene Eigenthümlichkeiten des Differenzial-Kalkuls auf dem gegenseitigen Verhalten der Monomien und Binomien beruhen: so wird man dieses letztere in der Integral-Rechnung wieder benutzen können, um die Rechnungs-Operation durch Vertauschung der Binomien mit Monomien zu vereinfachen. Als Beispiel mag hier $\int \frac{x^2 \partial x}{a+x}$ dienen. Wird $a+x=z$ gesetzt, so ist $x^2 = z^2 - 2az + a^2$, und $\partial(a+x) = \partial z = \partial x$. Der Umtausch giebt das Differenzial $\frac{(z^2 - 2az + a^2)\partial z}{z}$, welches in drei einzelne Theile getrennt und so integrirt werden kann. Man erhält $\frac{1}{2}z^2 - 2az + a^2 \operatorname{logn} z + \text{Const.}$ d. i. $\frac{1}{2}(a+x)^2 - 2a(a+x) + a^2 \operatorname{logn}(a+x) + C$, und wenn für $x=0$ der Werth des Integrals auch $=0$ werden muſs, die beständige Gröſse $= \frac{1}{2}a^2 - 2a^2 + a^2 \operatorname{logn} a = a^2(\operatorname{logn} a - \frac{3}{2})$.

IX. Dieser Umtausch findet auch bei Trinomien Statt, indem das zweite Glied weggeschafft und die Function dadurch in ein Binomium verwandelt wird. Es sey z. B. $\partial z \sqrt{(a - bz + cz^2)}$ zu integriren: so giebt $z = y \pm \frac{b}{2c}$ den Ausdruck $\partial y \sqrt{(a - \frac{b^2}{2c} + \frac{b^2}{4c} + cy^2)}$, wo die drei ersten Glieder unter dem Wurzelzeichen $= \alpha$ gesetzt werden können, um die binomische Function $\partial y \sqrt{(\alpha + cy^2)}$ zu erhalten. Diese läſst sich entweder nach irgend einer bekannten Form integriren, oder wenn eine solche nicht da seyn sollte, in eine unbegränzte Reihe

auflösen. Für den gegenwärtigen Fall findet das Erstere Statt, und es ist

$$\int \partial y \sqrt{(\alpha + cy^2)} = \tfrac{1}{2} y \sqrt{(\alpha + cy^2)} + \frac{\alpha}{2\sqrt{c}} \text{ logn } [\sqrt{c}y^2 + \sqrt{(\alpha + cy^2)}].$$

Wird nun $z - \frac{b}{2c}$ für y, $z^2 - \frac{bz}{c} + \frac{b^2}{4c^2}$ für y^2, und $\frac{4ac - bb}{4c}$ für α wieder eingeführt: so kommt das Integral

$$\tfrac{1}{2}\left(z - \frac{b}{2c}\right)\sqrt{(a - bz + cz^2)} + \frac{4ac - bb}{8c\sqrt{c}} \text{ logn } \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4c} - bz + cz^2\right)} + \sqrt{(a - bz + cz^2)}}{\sqrt{\{(4ac - b^2) : 4c\}}}\right] + C.$$

X. Oft ist es sogar nöthig, Binomien in andere Binomien zu verwandeln, um ein vorgelegtes Differenzial auf eine bekannte Form zurück zu bringen. Dahin gehört unter andern die Function $\frac{\partial x}{a^2 x - x^3}$, welche sich auf die Weise, wie man Brüche zerlegt, in drei besondere Functionen auflösen, und solchergestalt integriren läſst. Man hat

$$\int \frac{\partial x}{a^2 x - x^3} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\partial x}{x} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{\partial x}{a + x} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{\partial x}{a - x}.$$

Auf eine ähnliche Art wird das Integral von

$$\frac{(1 - x + x^2)\partial x}{a^2 x - x^3} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\partial x}{x} - \frac{(a + a^2 + a^3)}{a^3 + 1} \int \frac{\partial x}{a + x} + \frac{a^2(1 + a^2) - 1}{a(a^3 + 1)} \int \frac{\partial x}{a - x} + C$$

gefunden. Beide lassen sich vermittelst des unter Num. VIII. angegebenen Verfahrens, oder auch mit Hülfe bekannter Integral-Formeln, weiter entwickeln.

§. 41.

Es ist hier nicht die Absicht, eine vollständige Anleitung zur Integral-Rechnung zu geben; denn das würde theils eine andere Ordnung, theils ein sehr weitläuftiges Werk erfodern. Vielmehr soll das Vorhergehende bloſs dazu dienen, aufmerksam darauf zu machen,

1. daſs die Anzahl und Mannichfaltigkeit der mittelbaren Differenziale in Hinsicht ihrer verschiedenen Gestalt, nicht zu übersehen ist;
2. daſs durch sie allein alle Schwierigkeit in den Integral-Kalkul gebracht wird, indem ungeachtet der vielen Integrations-Formeln die es giebt, doch immer noch Differenzial-Functionen vorkommen können, die sich nur mit

Mühe nach der einen oder andern jener allgemeineren Vorschriften integriren lassen;

3. dafs die Integration sowohl der mittelbaren als auch der unmittelbaren Differenziale, überall auf dem Rückgange von dem zweiten Gliede in einer Reihe zu ihrem Anfangsgliede, also ganz allgemein auf einer gewissen Beziehung zwischen Monomien und Binomien oder Polynomien beruhe.

Besonders giebt Num. 3. einen wichtigen Aufschlufs über die Natur des Differenzial-Kalkuls. Denn indem Leibnitz darauf hinweiset, dafs bei der Integration eine ähnliche Vernichtung einiger Glieder von der binomischen Potenz, oder überhaupt von dem entstandenen Binom und Polynom, wie beim Ausziehen der Wurzeln Statt finden mufs, deckt er die Nothwendigkeit seiner Absonderung gewisser Differenzentheile so klar auf, dafs hier nicht mehr die Frage seyn kann, ob sie auch aus allen möglichen Gesichtspuncten betrachtet, die Probe aushalten werde. Wie $\sqrt[n]{(a+b)^n} = \sqrt[n]{a^n + 0 \,.\, na^{n-1}b + \frac{0 \,.\, n(n-1)}{1 \,.\, 2} a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + b^n} = a+b$, durch die Vernichtung aller zwischen den beiden höchsten Potenzen von a und b liegenden Binomial-Gliedern wieder erhalten wird, so mufs aus der binomischen Reihe

$$nx^{n-1}\partial x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} x^{n-2}\partial x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\partial x^3 + \ldots\ldots + \partial x^n$$

das erste Glied $x^n = \frac{n}{n-1+1} x^{n-1+1} \frac{\partial x}{\partial x}$ als das Integral, durch die Vernichtung aller nach dem ersten Gliede der Differenz folgenden wieder hergestellt werden. Diese Vernichtung einiger Glieder, und nichts anders, ist das Aehnliche, was beide Rechnungs-Operationen miteinander gemein haben; denn hievon abgesehen sind sie sehr verschieden, indem das Wurzel-Ausziehen, von einem Polynomium zu einem Binomium, in welchem beide Theile in der ersten, wenigstens allgemein in einer niedrigern Potenz erscheinen, das Integriren aber, von einem Binomium oder Polynomium zu einem Monomium (oder weniger- zuweilen auch wohl mehr-zähligen Polynomium) in derselben Potenz n zurückführt. Diese Vernichtung ist in der That so nothwendig, dafs die ärgsten Fehler begangen werden würden, wenn jemand sie unterlassen wollte. Da nun aber ein Theil der Differenz in der Aufeinanderfolge potenzirter Bi-

nomien unweigerlich Null werden muſs; warum soll er nicht gleich bei der Differenziation zernichtet werden, damit man für den ganzen Verlauf der Rechnung denjenigen Theil rein habe, von welchem die verlangte veränderliche Gröſse wesentlich abhängig ist? Dieser das Gesuchte bestimmt und richtig hervorbringende, dabei auch beständig bleibende Differenzentheil, ist das Differenzial. Setzen wir zwei veränderliche unpotenzirte Gröſsen, so wie sie die äuſsere Gröſsenwelt uns überall vorführet, einander gleich, z. B. $x = y$: so müssen die Differenziale derselben, von welcher Ordnung sie auch seyn mögen, ebenfalls gleich bleiben, und es entsteht der Satz $x : y = \partial x : \partial y = \partial^2 x : \partial^2 y$ u. s. w. das heiſst die Differenziale verhalten sich, wie ihre zugehörigen veränderlichen Gröſsen *). Soll dieser Satz im ganzen Gebiet der Differenzial-Rechnung feststehen, so muſs im Augenblick der Integration schlechterdings $\partial y = nx^{n-1}\partial x + \frac{0 . n (n-1)}{1 . 2} x^{n-2}\partial x^2 + 0 \ldots\ldots$ das heiſst $\partial y = nx^{n-1}\partial x$ seyn; denn mit welchem Recht wollte man sonst auf $y = x^n$ schlieſsen? Es muſs also eingeräumt werden, daſs $nx^{n-1}\partial x$ für einen gewissen Augenblick, ohne alle weitere Zugaben oder Abzüge, dem ∂y gleich ist. Nun bringt es aher die Natur des Kalkuls mit sich, das $nx^{n-1}\partial x$, so oft es als Differenzial von einer bestimmten Ordnung angesehen werden darf, für eine beständige Gröſse zu nehmen. Daraus folgt, daſs wenn $nx^{n-1}\partial x$ einen einzigen Augenblick $= \partial y$ ist, es in allen übrigen Augenblicken seiner Dauer, also auch schon bei der Differenziation $= \partial y$ seyn müsse. Eben darum ist jeder Zuschuſs zu $nx^{n-1}\partial x$, etwas die Gleichung $\partial y = nx^{n-1}\partial x$ zerstörendes, welches neben dem Differenzial nicht geduldet werden kann, sondern als überschüssig weggeworfen werden muſs. Das erste das beste Beispiel dient hier, einen Belag für die allgemeine Wahrheit dieser Sache herzugeben. Wenn die eine veränderliche Gröſse $= 16$, die andere $= 4^2$, und das Increment der ersteren $= 8$, der letztern, nach der Hinwegnahme der integralisch hinfälligen Theile, eben so groſs seyn soll; so wird man die Gleichungen

*) Vergl. Leibn. Op. omn. T. III. pag. 169. Ein Satz, den auch die Theorie der Gränz-Verhältnisse, vergl. §. 18. Num. 1. α., und C. Mac Laurin, vergl. §. 10. gegen das Ende, angenommen hat.

$$16 = 4^2$$
$$16+8 = (4+1)^2 = 4^2+2.4+0.1$$
$$16+2.8 = (4+2.1)^2 = 4^2+2.2.4+0.4$$
$$16+3.8 = (4+3.1)^2 = 4^2+2.3.4+0.9$$

u. s. w. haben, bei welchen keine Willkühr, keine unendliche Kleinheit der Incremente, kein auf dieser letztern sich stützender Fundamentalsatz der neuern Functionen-Rechnung u. dgl. sondern einzig und allein ein strenges Gebot, welches vom Differenzial- und Integral-Kalkul gleichzeitig ausgeht, die leibnitzische Absonderung der überschüssigen Differenzentheile vorschreibt. Sie ist also kein Irrthum, wie Lagrange behauptet, sondern tief durchdacht; und wer sie auch nur für etwas beim Entstehen des Differenzial-Kalkuls noch Unbegründetes erklärt, giebt dadurch zu erkennen, daſs ihm die ganze Differenzen-Methode bis dahin ein Räthsel sey. So weit nun dieser Kalkul frei bleibt von dem Zwange, den ihm die Geometrie durch die mittelbaren Differenziale ihrer Figuren auferlegt, soweit er seine Differenziale wie seine Integrale sich frei erschaffen kann, soweit ist kein Zweifel und keine Widerrede vermögend, ihm unendlich kleine Incremente aufzudringen. Es ist ein Irrthum, daſs einige Glieder in den Differenzen um ihrer Kleinheit oder Nullität willen weggeworfen werden müſsten; sondern der wahre Grund liegt darin, daſs jene Glieder die Richtigkeit der Differenzial-Verhältnisse und Differenzial-Gleichungen zerstören. Da übrigens dieses Verfahren in dem Infinitesimal- oder geometrischen Differenzial-Kalkul ebenfalls gültig bleibt: so ist es unläugbar, daſs auch hier die Incremente nicht Nullen seyn dürfen, obgleich es nöthig ist, sie sehr klein anzunehmen. Wollte aber jemand um deswillen den geometrischen Differenzial-Kalkul nur eine Annäherungs-Methode nennen, so würde er lediglich seine Unkunde der Sache verrathen, und den Differenzial-Kalkul für eine Exhaustions-Methode (wie Newton) ansehen, die er schlechterdings nicht ist, und eben darum auch nicht nöthig hat, krumme Linien u. dgl. bis auf geometrische Puncte einschrumpfen zu lassen, damit sie grade Linien genannt werden dürfen. Die erste und wichtigste Frage beim Integriren eines sogenannten geometrischen Elements ist diese: kann es für ein wahres Differenzial (d. h. für eine durch Veränderung der unbeständigen Gröſse entstehende immer wiederkehrende oder beständige Differenz) angesehen werden? —— aber keinesweges ist es diese:

sind die krummen Theile schon klein genug, um nach aller Strenge dieser entgegen gesetzten Begriffe, als grade angesehen werden zu können? —— Diese vorgespiegelte Verwandelung des Krummen in etwas Grades, ist bei allem Schein von logischer Strenge, dennoch ein logisches Unding, und es muſs nicht wenig befremden, daſs man den auffallenden Widerspruch in dem Satze nicht hat fühlen wollen: „die krumme Linie wird eine grade, wenn sie sich bis zu einem geometrischen Puncte verkürzt." Ist denn der Punct, das heiſst die Gränze einer Linie, wohl eine Linie zu nennen, oder die Linie selbst? —— Iede bejahende Antwort, zerstört hier einige der ersten geometrischen Begriffe.

Dritter Abschnitt.

Darstellung der besonderen Differenzial-Rechnung, und Erklärung, warum dieser auf Geometrie angewandte Theil vom Erfinder auch Infinitesimal-Kalkul genannt worden ist.

§. 42.

Wenn ein veränderlicher Kreisbogen x nach und nach die Incremente $\partial x > \sin \partial x$, $2\partial x > \sin 2\partial x$, $3\partial x > \sin 3\partial x$ u. s. w. erhält, so giebt diese Veränderung eine Reihe von folgenden Gliedern:

1. Gl. $\sin x = \sin x + 0$
2. Gl. $\sin(x+\partial x) = \sin x \cos \partial x + \cos x \sin \partial x$
3. Gl. $\sin(x+2\partial x) = \sin x(2\cos \partial x^2 - 1) + 2\cos x \sin \partial x$
4. Gl. $\sin(x+3\partial x) = \sin x(\cos \partial x^3 - 3\cos \partial x \sin \partial x^2) + \cos x(3\sin \partial x \cos \partial x^2 - \sin \partial x^3)$

u. s. w. Es ist schon aus diesen vier Gliedern sichtbar, daſs die auf der rechten Seite der Gleichung befindlichen, bloſs bis zum dritten einen beständigen Theil der Differenz geben: daher eignen sich sogenannte endliche Incremente nicht, zur Entwickelung eines trigonometrischen Differenzials für den Sinus eines veränderlichen Bogens. Aus diesem Grunde ist man genöthigt, die Incremente so klein zu nehmen, daſs die Sinus derselben im Verhältnisse der Bogen stehen, und diese letztern, wie es bei sehr kleinen Winkeln in den trigonometrischen Tafeln geschieht, mit jenen vertauscht werden können. Unter dieser Bedingung kommt folgende Reihe zum Vorschein:

1. Gl. $\sin x = \sin x$

2. Gl. $\sin(x+\partial x) = \sin x \cos \partial x + \cos x \partial x$

3. Gl. $\sin(x+2\partial x) = \sin x\,(2\cos \partial x^2 - 1) + 2\cos x \partial x$

4. Gl. $\sin(x+3\partial x) = \sin x\,(\cos \partial x^3 - 3\cos \partial x . \partial x^2) + 3\cos x \partial x$ u. s. w.

I. Setzt man nun $\sin x = y$, so ist $\sin(x+\partial x) = y + \partial y$, $\sin(x+2\partial x) = y + 2\partial y$ u. s. w. Der Abzug auf beiden Seiten giebt, so weit man die Reihe nur immer fortsetzen mag, ∂y gleich dem beständigen Differenzentheil $\cos x\partial x$, welcher nach Absonderung des Ueberschüssigen und Unbeständigen das verlangte Differenzial ist. Es muſs daher $\partial(\sin x) = \cos x \partial x$ seyn.

II. Eben so führt die analytische Trigonometrie auf die folgende Reihe von Gliedern eines ununterbrochen wachsenden Kreisbogens, nach welcher sich der Cosinus von x verändert:

1. Gl. $\cos x = \cos x$

2. Gl. $\cos(x+\partial x) = \cos x \cos \partial x - \sin x \partial x$

3. Gl. $\cos(x+2\partial x) = \cos x\,(2\cos \partial x^2 - 1) - 2\sin x \partial x$

4. Gl. $\cos(x+3\partial x) = \cos x\,(\cos \partial x^3 - 3\partial x^2 \cos \partial x) - 3\sin x \partial x$ u. s. w.

Der Abzug der aufeinander folgenden Glieder, und die Absonderung der unbeständigen Differenzentheile, giebt $\partial(\cos x) = -\sin x \partial x$.

III. Von diesen beiden Differenzialen des Sinus und Cosinus, hängen die Differenziale aller übrigen trigonometrischen Linien ab, und man erhält mit Hülfe der Differenzial-Formeln im §. 34 und §. 35., oder auch der Differenziations-Regeln in der Einleitung:

1. $\partial(\text{tang}\,x) = \partial\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\partial x}{\cos x^2} = \frac{\partial x}{\cos x^2}$.

2. $\partial(\cot x) = \partial\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{(\sin x^2 + \cos x^2)\partial x}{\sin x^2} = -\frac{\partial x}{\sin x^2}$.

3. $\partial(\sec x) = \partial\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{-\partial(\cos x)}{\cos x^2} = \frac{\sin x \partial x}{\cos x^2}$.

4. $\partial(\text{cosec}\,x) = \partial\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\partial(\sin x)}{\sin x^2} = -\frac{\cos x \partial x}{\sin x^2}$.

5. $\partial(\sin \text{v} x) = \partial(1 - \cos x) = -\partial(\cos x) = \sin x \partial x$.

6. $\partial(\cos \text{v} x) = \partial(1 - \sin x) = -\partial(\sin x) = -\cos x \partial x$.

IV. Nennt man die trigonometrischen Linien, welche einem veränderlichen Bogen x angehören, nacheinander y, so entstehen die Ausdrücke $\text{arc}\sin y = x$,

$\partial(\text{arc} \sin y) = \partial x$; arc $\cos y = x$, $\partial(\text{arc} \cos y) = \partial x$; arc tang $y = x$, $\partial(\text{arc tang } y) = \partial x$ u. s. w. Für alle diese ∂x hat man, vermöge der acht vorhergehenden trigonometrischen Differenziale, acht verschiedene Ausdrücke, nämlich $\partial x = \frac{\partial(\sin x)}{\cos x}$, $\partial x = -\frac{\partial(\cos x)}{\sin x}$, $\partial x = \cos x^2 . \partial(\text{tang} x)$ u. s. f. Das giebt nun folgende **Bogen-Differenziale**, bei welchen y für $\sin x$, ∂y für $\partial(\sin x)$, ingleichen y für $\cos x$, ∂y für $\partial(\cos x)$, ferner y für tang x, ∂y für $\partial(\text{tang} x)$ u. s. w. gesetzt werden muſs.

1. $\partial(\text{arc} \sin y) = \partial x = \frac{\partial(\sin x)}{\cos x} = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$;

2. $\partial(\text{arc} \cos y) = \partial x = -\frac{\partial(\cos x)}{\sin x} = -\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$;

3. $\partial(\text{arc tang } y) = \partial x = \frac{\partial(\text{tang } x)}{\sec x^2} = \frac{\partial y}{1+y^2}$;

4. $\partial(\text{arc} \cot y) = \partial x = -\frac{\partial(\cot x)}{\text{cosec } x^2} = -\frac{\partial y}{1+y^2}$;

5. $\partial(\text{arc} \sec y) = \partial x = \frac{\cos x^2 \, \partial(\sec x)}{\sin x} = \frac{\partial(\sec x)}{\sec x \sqrt{(\sec x^2 - 1)}} = \frac{\partial y}{y\sqrt{(y^2-1)}}$;

6. $\partial(\text{arc cosec } y) = \partial x = -\frac{\sin x^2 \, \partial(\text{cosec } x)}{\cos x} = -\frac{\partial(\text{cosec } x)}{\text{cosec } x \sqrt{(\text{cosec } x^2 - 1)}}$
$= -\frac{\partial y}{y\sqrt{(y^2-1)}}$;

7. $\partial(\text{arc sin v} y) = \partial x = \frac{\partial(\sin \text{v} x)}{\sqrt{(1-\cos x^2)}} = \frac{\partial(\sin \text{v} x)}{\sqrt{(2 \sin \text{v} x - \sin \text{v} x^2)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(2y - y^2)}}$;

8. $\partial(\text{arc cos v} y) = \partial x = -\frac{\partial(\cos \text{v} x)}{\cos x} = -\frac{\partial(\cos \text{v} x)}{\sqrt{(2 \cos \text{v} x - \cos \text{v} x^2)}} = -\frac{\partial y}{\sqrt{(2y - y^2)}}$.

V. Da verschiedene Differenziale sich auf diese letzteren acht Formen zurückbringen lassen, so sind sie für die Integral-Rechnung besonders wichtig. Wenn z. B. das Differenzial $\frac{x\partial x}{\sqrt{(a^2-x^4)}}$ zu integriren wäre: so würde man $x\partial x = \partial z$ setzen können, welches $x^2 = 2z$, und $x^4 = 4z^2$ giebt. Durch Umtausch kommt $\frac{x\partial x}{\sqrt{(a^2-x^4)}} = \frac{\partial z}{a\sqrt{(1-\frac{4}{a^2}z^2)}}$, wovon das Integral $\frac{1}{2}$ arc $\sin \frac{2z}{a} = \frac{1}{2}$ arc $\sin \frac{x^2}{a}$ ist. Seine Richtigkeit erhellet aus $\frac{1}{2}\partial(\text{arc} \sin \frac{x^2}{a})$, wenn die obige Form IV. Num. 1. bei der Differenziation zum Grunde gelegt wird.

§. 43.

Obgleich die Differenzial-Rechnung im Vorhergehenden genöthigt war, sehr kleine Incremente zu gebrauchen, um trigonometrische Differenziale zu erhalten: so folgt daraus doch keinesweges, daſs sie überall in der Geometrie an so kleine Veränderungs-Elemente gebunden sey. Denn es ist leicht einzusehen, daſs dieser Zwang nicht aus ihrer eigenen, sondern vielmehr aus der Natur des algorithmisch behandelten Gegenstandes herflieſse, folglich sehr bedingt sey. Die Lehre von den Tangenten und Normalen kann diese Behauptung rechtfertigen. Denn obgleich man hier das elementarische oder characteristische Dreieck, wie Leibnitz es nennt (Op. omn. T. III. pag. 85: „ob crebros usus", pag. 128, 193 u. a. m.) und welches, wie er sich ausdrückt, wenigstens noch die Gestalt eines Dreiecks (in quo retineatur species Trianguli) haben soll, zum Grunde zu legen pflegt: so ist es doch völlig entbehrlich; weil es nur darauf ankommt, zu den Incrementen beider Coordinaten und zur Ordinate eine vierte Proportional-Linie, die Subtangente zu suchen, um die verlangte Tangente an die Curve zu ziehen. Es sey in Fig. 3. wie gewöhnlich $AP = x$, $PM = y$, $Pp = \partial x = Mq$, $pm - PM = \partial y = mq$ und der Coordinaten-Winkel ein rechter: so läſst sich auf jeden Fall zu drei graden, eine vierte Proportional-Linie finden. Sind diese drei grade Linien ∂y, ∂x und y, so hat man $\partial y : \partial x = y : \frac{y \partial x}{\partial y}$. Nun sey $BP = \frac{y \partial x}{\partial y}$, und man lege an den Punct B das Increment der Abscisse $Pp = BC$, errichte aus dem Puncte C eine lothrechte Linie $CD = mq$, so sind jetzt offenbar zwei ähnliche Dreiecke BCD und BMP möglich: folglich muſs die grade Linie BD, welche durch die Puncte B und D gelegt wird, nothwendig den Endpunct M der Ordinate PM, und nur diesen treffen *). Er ist aber auch ein Punct in der Curve, daher ein Berührungspunct, und eben darum nicht nur BM eine berührende, sondern auch BP ihre Subtangente. Hier ist nicht das ge-

---

*) Da in keiner Curve mit gradelinigen Coordinaten $x : x' = y : y'$ angenommen werden kann, weil dies eine Gleichung für die grade Linie seyn würde: so ist es unmöglich, daſs BM verlängert auch den Punct m treffen sollte, sondern er bleibt unter ihr liegen. Am leichtesten kann man sich hievon vermittelst der gemeinen Parabel überzeugen, wo das Verhältniſs $y : \frac{y \sqrt{x'}}{\sqrt{x}} < y : \frac{x' y}{x}$ ist.

ringste Bedürfnifs, Mq und mq unendlich klein zu nehmen; denn die Proportionalität der Subtangente hängt nicht ab von der Aehnlichkeit der Dreiecke Mmq und BMP, sondern lediglich von dem Verhältnifse, welches drei grade Linien zu einander haben, und von der Aehnlichkeit der beiden gradelinigen Dreiecke BCD und BMP. Noch weniger bedarf man einen unendlich kleinen Bogen Mm, um die Subnormale PN zu finden; weil auf jeden Fall nur die Aehnlichkeit der Dreiecke BMP und MNP verlangt wird. Man hat also ganz unabhängig von der Gestalt und Gröfse des Dreiecks Mmq, die Proportion $BP : PM = PM : PN$ oder $\frac{y\partial x}{\partial y} : y = y : \frac{y\partial y}{\partial x}$, wo die vierte Proportional-Gröfse der allgemeine Ausdruck für die Subnormale PN ist, in welchen der Werth von einem jeden besondern y und ∂y, nach Maafsgabe der Gleichung einer Curve, eingeführt werden mufs.

§. 44.

Es ist augenfällig, dafs aus den beiden Hauptgleichungen des vorhergehenden Paragraphs $\frac{y\partial x}{\partial y} = BP$, und $\frac{y\partial y}{\partial x} = PN$, auf welchen die ganze directe Methode der Tangenten beruht, die umgekehrte Methode der Tangenten leicht abgeleitet werden kann. Iene lehret aus der gegebenen Gleichung einer Curve die Subtangente und Subnormale finden. Beide sind auf der verlängerten Abscisse die Abstände vom Puncte P, aus welchen die Tangente oder ihre Normale nach dem Puncte M gezogen werden mufs. Die umgekehrte Methode der Tangenten zeigt das Verfahren, von der Gleichung für die Subtangente oder Subnormale, wieder zu der Gleichung für die zugehörige besondere Curve zu gelangen.

1. Es sey AM in Fig. 3. der Bogen einer Ellipse, deren Gleichung $y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$, und Differenzial der Ordinate $2y\partial y$, das Increment

$$\partial y = \frac{(p - \frac{2px}{a})\partial x}{2(px - \frac{px^2}{a})^{\frac{1}{2}}}$$ giebt: so ist $\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{2x(a-x)}{a-2x}$ = der Subtangente. Um von diesem Ausdruck zu der Gleichung für die Curve zurückzugehen, ist nur nöthig, die erhaltene Function von x dergestalt zu ordnen, dafs jedes Increment

als Factor, die ihm zugehörige veränderliche Grösse in ihrer Verbindung mit beständigen Theilen bei sich habe, und hierauf zu integriren. Man erhält für diesen Fall $\frac{(a-2x)\partial x}{2x(a-x)} = \frac{\partial y}{y}$. Was linkerhand des Zeichens steht, läſst sich in zwei Brüche $\frac{\partial x}{2x}$ und $\frac{-\partial x}{2(a-x)}$ auflösen. Die Integration giebt $\frac{1}{2}$ logn x + $\frac{1}{2}$ logn $(a-x)$ + Const = logn y. Für $y = 0$ ist auch $x = 0$, also Const $= -\frac{1}{2}$ logn a: daher logn y = logn $\frac{x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, oder $y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$, und beides zur zweiten Potenz erhoben, $y^2 = 1\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$, das heiſst, wenn für den bestimmten Parameter wieder der unbestimmte p gebraucht wird, $y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$, welches die anfängliche Gleichung für die Ellipse war.

2. Es sey AM in Fig. 3. ein Kreisbogen, und $y^2 = ax - x^2$, wenn a den Durchmesser bezeichnet: so hat man $y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ und die Subnormale $\frac{y\partial y}{\partial x} = \pm (\frac{1}{2}a - x)$, wo das untere Zeichen gebraucht werden muſs, wenn die Abscisse schon gröſser, als der Halbmesser geworden ist. Soll aus diesem Ausdruck die Gleichung für die Curve wieder hergestellt werden, so verfährt man auf eine ähnliche Art, wie unter Num. 1. Es ist nämlich das geordnete Differenzial $y\partial y = (\frac{1}{2}a - x)\partial x$ zu integriren, welches $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2$, oder $y^2 = ax - x^2$ wieder giebt.

3. Hieraus geht die allgemeine Regel hervor, daſs wenn irgend ein Ausdruck für eine Subtangente oder Subnormale gegeben ist, und die Gleichung für die zugehörige Curve verlangt wird, jener entweder mit $\frac{y\partial x}{\partial y}$ oder mit $\frac{y\partial y}{\partial x}$ zu einer Gleichung verbunden, gehörig geordnet und integrirt werden müsse. Wäre z. B. die Subtangente = 1 und die Subnormale $= a^2x - 3ax^2 + 2x^3$ vorgelegt: so würde $\frac{y\partial x}{\partial y} = 1$ das Integral x = logn y und $\frac{y\partial y}{\partial x} = a^2x - 3ax^2 + 2x^3$ das Integral $y = x(a-x)$ geben. Ienes ist die Gleichung für eine logarithmische Linie, dieses die Gleichung für eine Art von Parabel.

4. Man sieht hieraus, daſs die Theorie der Tangenten dem Differenzial-Kalkul, in Hinsicht der Gröſse seiner Incremente, gar keinen Zwang auferlegt,

obgleich die Differenziale hier durch die Betrachtung der Figuren entstehen, welche Leibnitz (Op. omn. T. III. pag. 117.) figuralem considerationem nennt, also mittelbare Differenziale sind, und als solche in seinen Infinitesimal- oder geometrischen Kalkul gehören, den er später, als den allgemeinen Differenzial-Kalkul erfand. *) Hieraus wird es begreiflich, warum er auf der einen Seite das sogenannte Unendlich-Kleine in seinem Kalkul nicht leiden wollte, und auf der andern Seite sich doch wieder solcher Incremente bediente, bei denen einige Differenzen-Glieder wegen der Unvergleichbarkeit (ob incomparabilitatem, welcher Ausdruck weiter unten erläutert werden wird) vernachläſsigt werden konnten. Sein allgemeiner Differenzial-Kalkul war an gar keine kleinen, am wenigsten also an unendlich kleine Incremente gebunden; weil ungeachtet ihrer endlichen Gröſse das Wegwerfen gewisser Glieder in den Differenzen-Reihen sich doch rechtfertigen lieſs. Dagegen legten ihm in dem geometrischen Kalkul die considerationes figurales, durch welche er seine dortigen Differenziale ausmittelte, mehrentheils den Zwang auf, die Incremente der Curven sehr klein anzunehmen, wie bereits die trigonometrischen Differenziale gezeigt haben. Hiemit fällt nun aller anscheinende Widerspruch der beiden Sätze weg, welche in dem mathematischen Nachlasse von Leibnitz liegen:

I. die momentanen Incremente sollen nicht als unendlich kleine Gröſsen betrachtet werden;

II. die momentanen Incremente müssen so klein genommen werden, daſs Vieles schon um der Unvergleichbarkeit willen vernachlässigt werden kann.

Iener Satz gilt in dem allgemeinen, dieser in dem besondern oder geometrischen Differenzial-Kalkul. Indessen wenn man den Ausdruck „infinite parvum" oder vielmehr „indefinite parvum" in der echt leibnitzischen Bedeutung nimmt: so ist diese verschiedene Beziehung beider vorhergehenden Sätze nicht einmal nöthig, um einzusehen, daſs hier schon an sich kein Widerspruch Statt finden kann. Denn das indefinite parvum soll fürs Erste kein Null seyn; weil

---

*) Comm. philos. et math. T. II. pag. 380: „Ego incepi calc. diff. a numeror. seriebus etc. Postea animadvertens, in Geometria differentias et summas (die Integrale der Differenzen) dare quadraturas, et multa, ob incomparabilitatem evanescere in lineis; via naturali perveni a calculo generali ad specialem geometricum seu infinitesimalem."

„Infinite parvum longissime abest a nullo“ (vergl. Comm. philos. et math. Tom. I. pag. 382.) und bei allen geometrischen Elementen immer noch eine Gestalt, z. B. einer Linie, oder irgend eine geometrische Figur, z. B. eines Dreiecks, Trapeziums u. dgl. übrig bleiben muſs: fürs Zweite, es braucht auch kein Null zu seyn; weil die geometrische Integration keine archimedische Exhaustion ist (vergl. Opera omn. Tom. III. pag. 124. seq. pag. 127. etc.) Diesemnach sind die sehr kleinen Incremente bloſs darum in den Differenzial-Kalkul hineingekommen, weil die beim Rectisiciren, Quadriren, Kubiren etc. der Curven benöthigten Differenziale, nicht unmittelbar, durch Differenziation eines bereits vorhandenen Integrals, sondern vielmehr durch eine Betrachtung derjenigen Figur, welche sich als Increment (und Differenzial) ansehen läſst, also mittelbar gefunden werden.

§. 45.

Um das Differenzial für die Bogenlänge einer Curve im Allgemeinen auszumitteln, und die Rectification der letztern einzuleiten, kann man von folgender Betrachtung ausgehen. Es sey in Fig. 3. das Dreieck BMP ähnlich dem Dreieck MNP, und bilde mit ihm ein Ganzes BMN, in welchem die Seite $MN = a$, $BM = b$, $BN = c$, ferner $PM = y$ und $PN = z$ ist: so finden folgende Proportionen Statt

$$1.)\quad a : b = y : c - z$$
$$2.)\quad a : b = z : y$$
$$3.)\quad a^2 : b^2 = z : c - z.$$

In der dritten liegt der Satz: das Quadrat der einen Aussenseite verhält sich zum Quadrat der andern, wie der eine Abschnitt der dritten Aussenseite zu ihrem andern Abshhnitt. Hieraus folgen die ganz allgemeinen Ausdrücke: $c = z\left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)$ und $a^2 + b^2 = c \cdot \frac{a^2}{z}$. Wenn nun auch

$$4.)\quad z : a = a : c$$

als möglich angenommen werden kann, so ist $\frac{a^2}{z} = c$ und $a^2 + b^2 = c^2$. Wendet man dies an auf das kleine Dreieck Mmq, und nennt die gekrümmte Seite ∂s, so wird es angehen, diese dergestalt in zwei Abschnitte d und $\partial s - d$ zu zer-

legen, dafs $\partial y^2 : \partial x^2 = d : \partial s - d$ ist. Eben so wird sich $d : \partial y = \partial y : \partial s$ als möglich annehmen lassen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man den Ausdruck

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial s,$$

als allgemeine Form eines Bogen-Differenzials, welches dadurch integrirbar gemacht werden mufs, dafs man aus der gegebenen Gleichung für eine besondere Curve, entweder ∂x^2 oder ∂y^2 entwickelt, und durch Einführung des erhaltenen Werths das eine von beiden Quadraten wegschafft. Als Beispiele können hier die Bogen der Radlinie und Logistik dienen. In jener ist $\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}}$, wenn a den Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet; in dieser $\frac{b \partial y}{y} = \partial x$, wenn b die Subtangente bedeutet. Das giebt im ersten Fall $\partial s = \partial x \sqrt{\frac{a}{x}}$ und $s = 2\sqrt{ax}$; im letztern $\partial s = \frac{\partial y \sqrt{(b^2 + y^2)}}{y}$ also $s = \sqrt{(b^2 + y^2)} - b \operatorname{logn} \frac{b + \sqrt{(b^2 + y^2)}}{y} + \text{Const.}$ Bei den mehresten Curven erhält man Differenziale, welche in eine Reihe aufgelöset werden können, um sie zu integriren. So giebt die Kreislinie $\partial s = \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} \partial x (a - x)^{-\frac{1}{2}}$ oder $\partial s = \partial (\text{arc sin } x) = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Das erstere ist ein mittelbares, das letztere ein unmittelbares Differenzial, aus §. 42. Num. IV. Ienes hat das Integral $s = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{a}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40a\sqrt{a}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112a^2\sqrt{a}} + \frac{35x^{\frac{9}{2}}}{1152a^3\sqrt{a}} +$ u. s. w. dieses $s = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 +$ u. s. f. Dort ist x Abscisse, hier aber Sinus für den Halbmesser $= 1$. Um beide Ausdrücke miteinander zu vergleichen, kann im erstern $x = a$ gesetzt werden, welches die Länge des Halbkreises giebt:

$$a\left(1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{40} + \tfrac{5}{112} + \tfrac{35}{1152} + \ldots\ldots\right).$$

Wird nun $a = 2$ gesetzt, so ist $\frac{1}{2}a =$ dem Halbmesser Eins. Eben so grofs kann man den Sinus x nehmen, wodurch die nämliche Reihe für den Kreisquadranten hervorkommt. Hieraus läfst sich der Schlufs ziehen, dafs die durch Betrachtung der Figur *Mmq* entstehenden mittelbaren Differenziale, mit den durch Differenziation unmittelbar erhaltenen einerlei Integral geben. Uebrigens ist auch in Hinsicht der Rectification der Kreislinie die Uebereinstimmung der

elementargeometrischen Resultate mit den hier gefundenen bekannt, und verbürgt die Zuverlässigkeit der letztern. Iedoch kann dadurch nicht bewiesen werden, daſs beide der Erfolg einer Erschöpfung (archimed. Exhaust.) sind, welche sich der Wahrheit auf Seiten der Differenzial-Rechnung um so mehr nähern müsse, je mehr die Dreiecks-Seite Mm Null sey. Leibnitz hat sich hierüber an keinem Orte deutlicher ausgesprochen, als in den Oper. omn. Tom. III. pag. 128*): „Triangulum inassignabile, quod ego characteristicum vocare soleo, triangulo assignabili (einem durch den Maaſsstab bestimmbaren) simile agnoscere, et tamen pro nihilo habere, in quo retineatur species (Gestalt) Trianguli abstracta a magnitudine, ita ut sit datae figurae, nullius vero magnitudinis; nescio an intelligi possit. Certe obscuritatem non necessariam inducere videtur. Figuram sine magnitudine quis agnoscat?" —— Es ist fast unbegreiflich, wie man den verständlichsten und gegründetsten Erklärungen des Erfinders der Differenzial-Rechnung von je her hat so viele Gewalt anthun können. Der folgende Paragraph wird einen völligen Aufschluſs darüber geben, was ein sogenanntes Element oder geometrisches Differenzial ist, und welcher algorithmische Zusammenhang zwischen ihm und seinem Integral Statt findet.

§. 46.

Bei der Quadratur der Curven erhält man das sogenannte Flächenelement, oder vielmehr das Differenzial der Fläche, durch die Betrachtung der gemischtlinigen Figur $PMmp$ (in Fig. 3). Wird Mm sehr klein genommen, so hat sie offenbar Aehnlichkeit mit einem Trapezium: folglich ist ihr Quadratinhalt $= \partial x \left(\frac{PM + pm}{2}\right) = \frac{1}{2}\partial x(y+y+\partial y) = y\partial x + \frac{1}{2}\partial x\partial y$. Gehörten diese letztern beiden Glieder in eine Binomialreihe dergestalt, daſs $y\partial x$ das zweite und $\frac{1}{2}\partial x\partial y$ das dritte wäre: so müſste nach §. 38. Num. II. und III., wie auch nach §. 39, das Glied $\frac{1}{2}\partial x\partial y$ nothwendig ein integralisches Null werden, also wegfallen; denn unter der Voraussetzung, daſs das Anfangsglied (terminus integralis) ein Monomium, oder eine eingliedrige Function ist, darf aus $\frac{1}{2}\partial x\partial y$ kein integrirender Theil derselben hergeleitet werden. Um sich nun davon zu überzeugen, daſs $y\partial x$ und $\frac{1}{2}\partial x\partial y$ in dieser Differenz, die noch kein Differenzial ist, nichts weiter seyn können, als zwei Glieder in unmittelbarer Binomial-Folge, und daſs

*) Es ist eine Berichtigung der Idee, welche Wallis vom geometrischen Differenzial-Kalkul hatte.

eben darum $\frac{1}{2}\partial x\partial y$ mit dem Coefficienten Null versehen werden müsse, setze man allgemein $y = 2px$, welches $\frac{1}{2}y = px$ und $\frac{1}{2}\partial y = p\partial x$ giebt. Durch Einführung dieser Werthe wird $y\partial x + \frac{1}{2}\partial x\partial y = 2px\partial x + p\partial x^2 = p(2x\partial x + \partial x^2)$. In dieser Gestalt erkennt man leicht, woher die Differenz entstanden seyn müsse, nämlich von $p(x + \partial x)^2 = p(x^2 + 2x\partial x + \partial x^2)$. Demnach ist die Stammgröſse $= px^2$, und läſst durch Abzug von $px^2 + 2px\partial x + p\partial x^2$ das Differenzial $2px\partial x + 0 \cdot p\partial x^2 = y\partial x + \frac{0 \cdot 1}{2}\partial x\partial y = y\partial x$, zufolge des §. 38. und 39. Nur diese Entdeckung hatte Leibnitz nöthig, um die Form eines allgemeinen Flächen-Differenzials oder sogenannten Flächenelements zu erhalten. Daſs er sie grade auf diesem Wege gemacht habe, liegt klar genug in den im §. 44. Num. 4. angeführten Worten: animadvertens, in Geometria differentias et summas dare quadraturas" u. s. w. Die Darstellung des Differenzials $y\partial x$ durch eine Figuren-Betrachtung, und die Vollendung der Quadratur der Curven (calculi tetragonistici), muſste das Werk eines und desselben Augenblicks seyn. Denn um das allgemeine Flächen-Differenzial auf jede besondere Curve anzuwenden, war nichts anders nöthig, als y mit der zugehörigen Function von der Abscisse x zu vertauschen, und das besondere Differenzial, z. B. $x^{\frac{1}{2}}\partial x\sqrt{(a-x)}$ beim Kreise, zu integriren. Das gegenwärtige Beispiel giebt einen Kreisabschnitt wie $APM = \frac{x^{\frac{1}{2}}(2x-a)\sqrt{(a-x)}}{4} + \frac{a^2}{4}\text{arc tang}\sqrt{\frac{x}{a-x}}$. Ist $x = \frac{1}{2}a$, so erhält man $APM = \frac{a^2}{4}\text{arc tang } 1 = \frac{a^2}{4}\text{arc tang } 45°$, wo $\frac{1}{4}a^2$ mit dem Bogen von 45° für den Halbmesser $= 1$ multiplicirt werden muſs. Gehörte APM einer Parabel, so würde $p^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{2}{3}x\sqrt{px} = \frac{2}{3}xy$ seyn. Bei einem gradelinigen rechtwinkeligen Dreieck wäre $APM = \frac{1}{2}xy$. Das giebt $\frac{2}{3}xy : \frac{1}{2}xy = 4 : 3$ als das Verhältniſs einer parabolischen Fläche zu einem gradelininigen Dreieck, welckes mit ihr einerlei Grundlinie und Höhe hat.

§. 47.

Legt man bei der Kubatur der Curven den Satz zum Grunde, daſs ein abgekürzter Kegel, oder ein solches Konoid gleich sey dem Product aus der Höhe in das arithmetische Mittel beider Grundflächen: so giebt die Umdrehung des kleinen Trapeziums $PMmp$ (Fig. 3.) um seine Axe Pp, den Körper $\frac{1}{2}\pi\partial x[y^2 + (y + \partial y)^2] = \frac{1}{2}\pi\partial x(2y^2 + 2y\partial y + \partial y^2)$. Durch die Multiplication mit dem ge-

meinschaftlichen Factor $\frac{\pi}{2}$ entstehen drei ungleichartige Grösen in der Parenthese, nämlich $y^2\pi$, welches eine Kreisfläche ist, $\pi y \partial y$ und $\frac{1}{2}\pi\partial y^2$, welches keine Kreisflächen sind, wenn zufolge des §. 31, ∂y als eine sehr kleine unbestimmte Einheit angesehen wird. Eben darum können $\pi y . 1$ und $\frac{1}{2}\pi . 1$ nicht mit πy^2 verglichen, und folglich auch nicht zu ihm addirt werden, sondern sie fallen aus der Summe beider Grundflächen des Konoids weg, oder wie Leibnitz es ausdrückt: „propter incomparabilitatem evanescunt." Also bleibt $\pi y^2 \partial x$ als Körper-Differenzial oder kubisches Element zurück. Man sieht leicht ein, daſs diese Unvergleichbarkeit (Incomparabilität oder Heterogeneität) der Addenden, bloſs innerhalb der Gränzen des geometrischen Differenzial-Kalkuls eine Bedeutung, und ausser diesen keine Allgemeingültigkeit haben könne; es sey denn, daſs man sich alle Gröſsen als geometrische Figuren mit einer gewissen Anzahl von Dimensionen vorstellen wollte. Dagegen findet der allgemeine integralische Absonderungs-Grund auch hier Statt, sobald nur nachgewiesen werden kann, daſs $2y^2 + 2y\partial y + \partial y^2$, oder vielmehr $\pi(y^2\partial x + y\partial y\partial x + \frac{1}{2}\partial y^2\partial x)$ das zweite, dritte und vierte Glied aus einem potenzirten Binomium (aus einer binomischen Kubikzahl) ist. Setzt man $y = px$ und $\partial y = p\partial x$, so giebt der Umtausch den Ausdruck $\pi(p^2x^2\partial x + p^2x\partial x^2 + \frac{1}{2}p^2\partial x^3) = p^2\pi\,(x^2\partial x + x\partial x^2 + \frac{1}{2}x^0\partial x^3)$ welches offenbar die natürliche Gliederfolge aus einer binomischen Kubikzahl ist, in welcher das erste Glied und der Coefficient 3 beim zweiten und dritten Gliede fehlt, also einen gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{3}p^2\pi$ voraussetzt. Mit Hülfe desselben würde man aus $x^3 + 3x^2\partial x + 3x\partial x^2 + x^0\partial x^3$ erhalten $p^2\pi(\frac{1}{3}x^3 + x^2\partial x + x\partial x^2 + \frac{1}{3}x^0\partial x^3)$, welches bis auf den Coefficienten im letzten Gliede mit der vorhergehenden Form übereinstimmt. Diese Verschiedenheit ist sehr unerheblich, besonders wenn man bedenkt, daſs $y\partial y\partial x$ und $\frac{1}{2}\partial y^2\partial x$ die binomisch veränderlichen Theile in der Differenzenfolge sind. Indessen läſst sich diese kleine Abweichung von der gesetzlichen Form dadurch völlig heben, daſs man den geometrisch richtigern Ausdruck für ein abgekürztes Konoid zum Grunde legt. Es sey nämlich die Höhe desselben $= h$, der Halbmesser der untern Grundfläche $= r$, der obern $= \varrho$, die Differenz beider letztern $= d$: so ist der kubische Inhalt desselben

$$= \frac{1}{3}hr^2\pi\left(1 + \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) = \frac{1}{3}h\pi(\varrho + d)^2\left[1 + \frac{\varrho}{\varrho + d} + \frac{\varrho^2}{(\varrho + d)^2}\right] = \pi\left[\varrho^2 h + \varrho d h + \frac{1}{3}d^2 h\right].$$

Wird nun ϱ mit y, d mit ∂y und h mit ∂x vertauscht: so erhält man den durch Umdrehung des Trapeziums *PMmp* entstandenen Körper $= \pi\,[y^2\partial x + y\partial y\partial x + \frac{1}{3}\partial y^2\partial x]$. Setzt man wieder $y = px$, so kommt $\pi[p^2x^2\partial x + p^2x\partial x^2 + \frac{1}{3}p^2\partial x^3]$, welches unläugbar aus der binomischen Kubikzahl $\frac{1}{3}\,p^2\pi[x^3 + 3x^2\partial x + 3x\partial x^2 + \partial x^3]$, durch Abzug von x^3, als dem ersten Gliede in der Reihe entstanden ist. Deswegen kann $p^2\pi x^2\partial x + p^2\pi x\partial x^2 + \frac{1}{3}p^2\pi\partial x^3$ oder $\pi y^2\partial x + \pi y\partial y\partial x + \frac{1}{3}\pi\partial y^2\partial x$ für nichts anders, als für eine durch binomische Potenzirung entstandene Differenz angesehen werden, in welcher das zweite und dritte Glied ein integralisches Null ist. Folglich erhält man mit aller Schärfe, die nur gesetzlich vom Kalknl gefodert werden kann, das allgemeine kubische Element, oder lieber das allgemeine geometrische Körper-Differenzial $\pi y^2\partial x$.

Hier ist nichts weiter nöthig, als aus jeder besondern Gleichung einer Curve den Ausdruck für das Quadrat ihrer Ordinate mit $\pi\partial x$ zu multipliciren und zu integriren, um den kubischen Inhalt des durch Umdrehung der Curve um ihre Axe u. dgl. entstandenen Körpers zu bestimmen. So ist unter andern der kubische Inhalt eines Kugel-Abschnitts $= \pi\int(ax - x^2)\partial x = \pi\,(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$, und einer ganzen Kugel $= a^3\,\pi\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\,\pi\,.\,a^3 = 0{,}523598\,a^3$.

§. 48.

Soll die krumme Oberfläche eines durch Umdrehung einer Curve um ihre Axe oder Asymptote u. dgl. entstandenen Körpers gefunden werden: so muſs der geometrische Satz zum Grunde liegen, daſs die krumme Oberfläche eines abgekürzten Kegels oder Konoids gleich ist einem Trapezium, welches den obern und untern Umfang zu Grundlinien und die abgekürzte Seite zur Höhe hat. Diesemnach erhält man den Ausdruck

$$\partial s\left[\frac{2y\pi + 2\pi(y + \partial y)}{2}\right] = \pi\,(2y\partial s + \partial y\partial s).$$

Um sich zu überzeugen, daſs $\pi\partial y\partial s$ das nach §. 41 u. a. zu vernichtende Binomialglied sey, darf nur $y = \varrho s$ gesetzt werden: so kommt $\pi\varrho\,(2s\partial s + \partial s^2)$, welcher Ausdruck von dem zur zweiten Potenz erhobenen Binomium $\pi\varrho(s + \partial s)^2$ herstammt. Es ist also das allgemeine Differenzial der krummen Oberfläche $2\pi\varrho s\partial s = 2\pi y\partial s = 2\pi y\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, in welchem entweder y und ∂y mit einer Function von der Abscisse x, oder umgekehrt ∂x mit einer Function von der Ordinate y vertauscht werden muſs, um es integriren zu können.

Als Beispiele dienen hier die Kreislinie und Logistik. In jener ist $\partial s = \frac{a\partial x}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$, also das Flächen-Differenzial $= a\pi\partial x$, und sein Integral $= a\pi x$; in dieser $\frac{\alpha\partial y}{y} = \partial x$, wenn α die Subtangente bezeichnet, welche y zugehört: folglich $\partial s = \partial y \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{y^2} + 1\right)}$ und $2y\pi\partial s = 2\pi\partial y\sqrt{(\alpha^2 + y^2)}$, wozu das Integral $\pi\left\{y\sqrt{(\alpha^2+y^2)} - \sqrt{(\alpha^2+1)} + \alpha \operatorname{logn}\left[\frac{y+\sqrt{(\alpha^2+y^2)}}{1+\sqrt{(\alpha^2+1)}}\right]\right\}$ gefunden wird.

§. 49.

Aus der bisherigen Entwickelung der geometrischen Differenziale geht ganz klar hervor, daſs wenn gleich die Incremente der Coordinaten und ihrer zugehörigen Bogen, um der an die Figur gebundenen Ableitung willen, sehr klein seyn müssen, doch keine Veranlassung da ist, diese Gröſsen $= 0$ anzunehmen; weil grade dadurch alle Figur und Figuren-Betrachtung wegfallen würde. Noch weniger ist ein Grund vorhanden, jene Incremente bei der Lehre vom Krümmungs-Winkel, Krümmungs-Halbmesser, von der Evolution u. s. w. als absolute Nullen anzusehen.

1. Es sey für den Punct m Fig. 3. die Tangente Qm gezogen, so werden BM und QM sich zwischen M und m schneiden, und einen sehr kleinen Winkel bilden, durch welchen bei dem Wachsthum des Bogens $AM = s$, die momentane Krümmung bestimmt werden kann, und welcher deshalb der Krümmungs-Winkel genannt wird. Er kommt zum Vorschein, wenn $LABM = \varphi$ kleiner wird, und ist folglich ein Decrement von φ, also $= \partial\varphi$. Um ihn von der Tangente BM und ihrer Subtangente BP ganz unabhängig zu machen, betrachte man BC als den Kreis-Halbmesser $= 1$, so ist CD die Tangente, und

$$1 : \operatorname{tang}\varphi = BC : CD = \partial x : \partial y,\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nach Maaſsgabe des Kreis-Differenzials §. 42. Num. IV, 3. ist hier

$$\partial\varphi = \partial\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\partial y : \partial x)}{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\partial x^2\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$$

$$= \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

In diesen allgemeinen Ausdruck für den Krümmungs-Winkel kann man bei einerlei und bei verschiedenen Curven, entweder aufeinander folgende oder auch gleiche Werthe von x und y einführen, um ein Verhältniſs der Krümmung an verschiedenen oder gleichnamigen Puncten dadurch zu erhalten. So ist z. B. in der Parabel $\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial x \sqrt{p}}{4x\sqrt{x}}$, und $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{p}{4x}$: folglich $\partial\varphi = -\frac{\partial x\sqrt{p}}{(4x+p)\sqrt{x}}$. Nun sey einmal $x = \frac{1}{4}p$, das anderemal $x = \frac{2}{4}p$, so giebt der Umtausch das Krümmungs-Verhältniſs $\frac{\partial x\sqrt{p}}{(\frac{4}{4}p+p)\sqrt{\frac{p}{4}}} : \frac{\partial x\sqrt{p}}{(\frac{8}{4}p+p)\sqrt{\frac{p}{2}}} = \frac{1}{p} : \frac{\sqrt{2}}{3p} = 3 : \sqrt{2}$, in dem einfachen und doppelten Abstande des Brennpuncts vom Scheitel.

2. In einer Curve mit Ordinaten aus einem Punct, wie Fig. 4, sey $AP = x$, $Pp = \partial x$, $CM = y$, $Cm - CM = \partial y$, $BCM = R$, $BC = \frac{y}{r} \cdot \frac{y\partial x}{\partial y}$ = der Subtangente, und $Gq \nparallel CM$: so ist $LDGq = BGD + BGq = BGD + BMC = DmC + Gqm = DmC + MCm$, folglich $BGD = \partial\varphi' = (DmC - BMC) + MCm = \partial(BMC) + MCm$. Da $CM : BC = y : \text{subtg} = y : \frac{y^2\partial x}{r\partial y} = 1 : \text{tang } BCM$, so ist $\text{tang } BCM = \frac{y\partial x}{r\partial y} = \frac{y}{r} : \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{r} : z = \frac{y}{rz}$, und $\partial(\text{tang } BCM) = \partial(\text{arc tang} \frac{y}{rz}) = \frac{rz\partial y - ry\partial z}{r^2z^2(1+\frac{y^2}{r^2z^2})} = \frac{r(z\partial y - y\partial z)}{r^2z^2+y^2}$. Dazu $\text{tang } MCm = \frac{\partial x}{r}$, so kommt der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Winkel $\partial\varphi' = \frac{r(z\partial y - y\partial z)}{r^2z^2+y^2} + \frac{\partial x}{r}$.

In diesen Ausdruck muſs nach Maaſsgabe der besondern Gleichung für y substituirt werden. Wäre z. B. AM der Bogen einer archimedischen Spiral-Linie: so würde $y = \frac{x}{2\pi}$, $\partial y = \frac{\partial x}{2\pi}$ und $z = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}$ seyn müssen. Das giebt $\partial\varphi' = \frac{(2r^2+x^2)\partial x}{r(r^2+x^2)}$. Soll in diesen Ausdruck ∂s für ∂x eingeführt werden, um ihn anwendbarer zu machen: so ist hier die Grundlinie für das elementarische Dreieck, dessen Hypothenuse Mm vorstellt, $= \frac{y\partial x}{r}$, und $\partial s = \sqrt{\left(\frac{y^2\partial x^2}{r^2} + \partial y^2\right)}$

$= \frac{\partial x}{2r\pi} \sqrt{(r^2+x^2)}$, folglich $\partial x = \frac{2r\pi \partial s}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$, und $\partial \varphi' = \frac{2\pi \partial s (2r^2+x^2)}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. In diesen Ausdruck lassen sich verschiedene x setzen, und man kann, unter der Bedingung, daſs ∂s überall gleich groſs angenommen wird, die Krümmung verschiedener Bogen dieser Curve miteinander vergleichen.

3. Aus 1 und 2 ist klar, daſs es bei dieser ganzen Betrachtung nirgend auf unendlich kleine Theile oder absolute Nullen ankommt. Im Gegentheil werden Winkel verlangt, deren Schenkel nicht aufeinander fallen, die also noch eine Gröſse haben sollen. Eben darum kann so wenig das Differenzial des Bogens, als einer der beiden Coordinaten in diesem Fall jemals $= 0$ seyn. Der Differenzial-Kalkul hat also hier, wie bei allen veränderlichen Gröſsen, mit blossen aber wirklichen Differenzen zu thun.

§. 50.

Derjenige Kreis, welcher mit dem gegebenen Bogen einer Curve einerlei Krümmung hat, heiſst der Krümmungs-Kreis (Schmiegekreis, Osculator) und sein Halbmesser der Krümmungs-Halbmesser (Schmiegemesser, Radius osculi). Einen allgemeinen Ausdruck für diesen letztern lehrt die Differenzial-Rechnung durch folgende Betrachtung (considerationem figuralem) finden. Der Winkel einer Kreistangente und Sehne ist gleich dem halben Centriwinkel der letztern $= \frac{1}{2}\eta$. Ist der diesem Winkel zugehörige Bogen $= \partial s$, und der Durchschnitts-Winkel beider an seinen Endpuncten liegenden Tangenten $= \partial \varphi$: so muſs der Halbmesser k ein Krümmungs-Halbmesser seyn. Die Proportion k : chord η $= 1 : 2 \sin \frac{1}{2}\eta = 1 : 2 \,.\, \frac{1}{2}\eta = 1 : \eta$, giebt vermöge des Satzes, daſs bei sehr kleinen Winkeln die Sinus im Verhältnisse der Bogen stehen, den ganz allgemeinen Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{\partial s}{\eta}$.

Nun läſst sich erweisen, daſs $\partial \varphi = 2R - (2R - \eta) = \eta$ sey: folglich kann für den Winkel η der Krümmungs-Winkel gesetzt werden, und man erhält den Ausdruck $k = \frac{\partial s}{\partial \varphi}$, das heiſst: der Krümmungs-Halbmesser ist im Allgemeinen gleich dem Quotienten aus dem Bogen-Differenzial dividirt durch den Krümmungs-Winkel. Es giebt aber Curven mit parallelen und concentrischen Ordinaten. Bei den erstern ist der Krümmungs-Winkel anders, als bei den letztern

ausgedrückt. Daher müssen auch zweierlei Ausdrücke für den Krümmungs-Halbmesser da seyn.

1. Für parallele Ordinaten ist der Krümmungs-Halbmesser

$$k = \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{\partial s^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}.$$

Wird $\frac{\partial y}{\partial x} = z$ gesetzt, so muſs $\partial y = z \partial x$, $\partial y^2 = z^2 \partial x^2$, $\partial s^2 = \partial x^2\ (1 + z^2)$ und $\partial s^3 = \partial x^3\ (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ werden. Daraus folgt

$$k = \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial z}\ (1 + z^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder wenn für z und ∂z die obigen Werthe gebraucht werden, und man zugleich ∂x als eine beständige Gröſse ansieht:

$$k = \frac{(1 + \partial y^2 \partial x^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-\partial^2 y \,.\, \partial x^{-2}}.$$

Für die gemeine Parabel z. B. erhält man, wegen $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$ und $\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{p^{\frac{1}{2}} \partial x}{4 x^{\frac{3}{2}}}$, den Krümmungs-Halbmesser $k = \frac{(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{p}}$, wo das negative Zeichen zu erkennen giebt, daſs die Richtung des Krümmungs-Halbmessers nicht vom Scheitelpuncte der Curve ausgeht, sondern eine der Abscisse entgegen gesetzte Lage hat, so daſs der Krümmungs-Kreis gegen die Axe der Curve hohl ist.

2. Gehen die Ordinaten einer Curve aus einem einzigen Puncte hervor, so ist der Krümmungs-Halbmesser gleich dem Quotienten aus dem Bogen-Differenzial, getheilt durch den Krümmungs-Winkel einer solchen krummen Linie. Daher in diesem Fall $\frac{\partial s}{\partial \varphi'} = \frac{\partial s}{r(z \partial y - y \partial z) : (r^2 z^2 + y^2)}$.

Aber $\frac{y \partial x}{r} = \sqrt{(\partial s^2 - \partial y^2)}$, also $y^2 = \frac{r^2(\partial s^2 - \partial y^2)}{\partial x^2}$, und $z^2 = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$. Durch Umtausch erhält man $\frac{\partial s}{\partial \varphi'} = \frac{r \partial s^3}{\partial x(\partial y^2 + \partial s^2 - y \partial^2 y) - \partial^2 x \,.\, y \partial y}$,

$$\text{oder} = \frac{r \partial s^3}{\partial x\,(\partial y^2 + \partial s^2 - y \partial^2 y)},$$

wenn ∂x als beständig angesehen und eben darum $\partial^2 x = 0$ wird.

3. Auch hier ist gar keine Nothwendigkeit vorhanden, die Gröſsen ∂s und $\partial \varphi$ für absolute Nullen anzusehen. Denn wenn beide $= 0$ wären, so müſste

auch der Krümmungs-Halbmesser $= 0$ werden; desgleichen in demjenigen Fall, wo $\partial s = 0$ seyn sollte und $\partial \varphi'$ nicht. Wäre aber dies letztere allein $= 0$, so würde man einen unbegränzten oder unendlichen Krümmungs-Halbmesser erhalten. Da nun weder dieser noch jener gesucht wird, so ist eine solche Voraussetzung, aus welcher doch Eins von beiden folgen müfste, durchaus widersinnig.

§. 51.

Eine Curve, welche in einer Ebene durch den Endpunct eines straffen Fadens, den man von einer andern Curve abwickelt, beschrieben wird, heifst eine Evolvente, und die durch Abwickelung wieder frei gewordene krumme Linie eine Evolute. Der abgewickelte Theil des straffen Fadens liegt immer tangentiell an der Evolute, folglich fällt er mit der Tangente der letztern zusammen, oder ist selbst die Tangente, wenn er gehörig bis an die Subtangente verlängert wird. In diesem Fall ist er gleich dem Bogen AM in Fig. 3 oder 4, wenn noch eine beständige Gröfse $BM - AM$ zu ihm hinzugefügt wird. Hieraus folgt, dafs man jeden verlangten Punct B in der Curve EF bestimmen kann, wenn das Bogenstück AM rectificirt, und in dem Fall, dafs die Evolvente nicht vom Scheitelpunct A ausgehen sollte, mit der benöthigten Constante versehen wird. Uebrigens ist BM der Krümmungs-Halbmesser der Evolvente, und wenn er $\varkappa$ genannt wird, sein allgemeiner Ausdruck

$$\varkappa = \int \partial s + \text{Const.}$$

welcher erfodert, dafs die Evolute sich rectificiren lasse. Da nicht geläugnet werden kann, dafs die Evolvente aus lauter kleinen Kreisbogen zusammengesetzt ist, deren Krümmung nach dem Gesetze der Stetigkeit ineinander übergeht: so ist auch leicht einzusehen, dafs die jedesmalige Tangente an dieser Curve auf dem zugehörigen Krümmungs-Halbmesser senkrecht stehen, und dieser letztere mit der Normale seiner Tangente immer einerlei seyn müsse. Die Auflösung der Aufgabe, eine Tangente an die Evolvente zu ziehen, beruhet also darauf, dafs man in der Evolute den benöthigten Punct M bestimmt, wohin der Krümmungs-Halbmesser $\varkappa$ aus dem gegebenen Puncte B gezogen werden mufs. Unter andern giebt die Gleichung für $\varkappa$ ein Mittel an die Hand, die Bogenlänge $s = \varkappa - C$ zur Bestimmung des Puncts M vermittelst der Abscisse anzuwenden. Hätte man eine Gleichung für die Evolvente, mit Hülfe deren sich an

jeden in ihr gegebenen Punct eine Tangente ziehen liefse: so ist klar, dafs alsdenn fürs Erste, die ihnen zugehörigen Normalen oder Krümmungshalbmesser gezogen, und fürs Zweite, wenn ihre Länge bekannt wäre, auch eine hinreichende Anzahl von Krümmungs-Mittelpuncten, als Puncten in der Evolute, bestimmt werden könnten, um den Zug dieser letzteren aus freier Hand zu machen.

Hienach wird es begreiflich genug, dafs die Beschaffenheit der Evolvente aus der Natur der Evolute, und umgekehrt die letztere aus der Gleichung für die erstere erkannt werden könne. Verbindet man hiemit noch, dafs je zwei Krümmungs-Halbmesser der Evolvente einen Krümmungs-Winkel für die Evolute bilden, welcher in einigen der hier vorkommenden Gleichungen mit in Rechnung zu ziehen ist: so sind das doch auch alle Gröfsen, die man in der Lehre von der Evolution braucht, und es zeigt sich nicht die mindeste Nothwendigkeit, dafs die Differenzial-Rechnung hier sogenannter unendlich kleiner Gröfsen, oder gar absoluter Nullen bedürfte. Vielmehr werden überall wahre Differenzen der veränderlichen Gröfsen erfodert, und die etwanige ausserordentliche Kleinheit derselben bringt immer nicht die innere Beschaffenheit dieses geometrischen Kalkuls, sondern lediglich die Betrachtung der geometrischen Figuren mit sich, bei denen eine Form nöthig ist, welche mit der Gestalt anderer leicht zu berechnender Figuren eine gewisse Aehnlichkeit hat.

Vierter Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Lehre vom Gröfsten und Kleinsten.

§. 52.

Es ist merkwürdig, dafs jede Function, jede geordnete Gleichung, und sogar jede Proportion aus dem gemeinen Dreisatze, einen Ausdruck für die Ordinate irgend einer Linie geben kann, diese möge krumm oder grade seyn. So sind z. B. $y = ax - x^2$, $y = \frac{p}{a}(ax - x^2)$, $y = ax - x^2 + c$, Gleichungen für Curven, die von ihrer Abscissenlinie a anfangs aufwärts, und nachdem sie die gröfste Höhe erreicht haben, wieder abwärts steigen. Die Gleichung $x^3 - 4x^2 + 4x = y$,

giebt für $x = 0$ auch die Ordinate $= 0$, für die Abscissen 0,12, 0,25, 0,50, 0,75, 1,00, 1,25, 1,5, 2 die Ordinaten 0,43, 0,76, 1,12, 1,17, 1,00, 0,70, 0,22, 0; sie bildet also anfangs eine eyförmige Figur, nachher aber krümmt sie sich unaufhörlich und zwar sehr schnell aufwärts. Eben so bringen die bekannten Binomial-Potenzen $a^2 \pm 2ax + x^2$, $a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3$ u. s. w. gewisse Linien, theils grade theils krumme hervor, je nachdem ihre Ordinate y in der ersten oder zweiten Potenz, und x als veränderlich angenommen wird. Auch führt jede Aufgabe aus der gemeinen Proportions-Rechnung auf eine Gleichung für eine grade, aus der Zins-Zinse-Rechnung aber auf eine Gleichung für eine logarithmische Linie. Da nun jede mögliche Function, ausser ihrer jedesmaligen besondern auch die allgemeine Bedeutung einer Ordinate in irgend einer graden oder krummen Linie haben kann, und die Ordinaten so beschaffen sind, daſs sie entweder unaufhörlich zunehmen, wie in einer Hyperbel, oder ohne Ende abnehmen, wie in derselben Curve, wenn die Asymptote als Abscissenlinie gebraucht wird; oder auch bis auf einen gewissen Punct ihrer Curve theils zu- theils abnehmen, aber über diesen hinaus wieder eine entgegengesetzte Veränderung leiden: so werden alle Functionen, welche Ordinaten von dieser letztern Art geben, einen Werth von x enthalten, bei welchem entweder ein längstes oder ein kürzestes y, das heiſst mit andern Worten, ein Gröſstes (Maximum) oder Kleinstes (Minimum) Statt finden muſs. Hieraus geht die erste Regel hervor:

1. Man betrachte die zu untersuchende Function als die Gleichung für eine Linie (als einen linearen Ausdruck).

Verbindet man hiemit noch die Vorstellung, daſs unter allen veränderlichen Ordinaten in einer Curve, entweder die gröſste oder die kleinste, wenn eine von beiden da ist, grade so, wie die kleine Axe in einer Ellipse, der Halbmesser im Kreise u. dgl. für eine beständige Gröſse angesehen werden muſs, dann entsteht eine zweite Regel, nämlich:

2. Man betrachte die Function als einen Ausdruck für eine beständige Gröſse, und differenziire die ganze Gleichung, so wird sie zufolge der Natur dieses Differenzials auf Null gebracht, und um einen Grad niedriger.

In dieser Gestalt bleibt sie auf Null, man mag sie multipliciren oder dividiren, womit man will; denn der Factor oder Divisor, welcher auf dereinen

Seite gebraucht wird, muſs auf der andern in Null entweder multiplicirt oder dividirt werden. Daraus folgt eine dritte Regel:

3. Man dividire die Gleichung durch das Increment der veränderlichen Gröſse.

Dies ist nöthig, weil an die Stelle eines jeden einzelnen veränderlichen Gliedes in der Function, das zweite binomische Glied, also anstatt x^n jetzt $nx^{n-1}\partial x$ gekommen ist; aber der Werth von x^{n-1} unabhängig von seinem Incremente gefunden werden soll. Endlich ergiebt sich hieraus für den Fall, daſs die Function eine ganz oder zum Theil gebrochene ist, noch eine vierte Regel:

4. Man bringe alles auf gleiche Benennung, und bestimme nun den Werth der veränderlichen Gröſse entweder aus dem Zähler oder aus dem Nenner der Function.

Es bleibt nämlich, zufolge des Vorhergehenden, die Gleichung auf Null, man mag die gebrochene Function mit ihrem Nenner multipliciren, oder durch ihren Zähler dividiren. Uebrigens läſst es sich nun leicht begreifen, warum nicht jede Function ein Gröſstes oder Kleinstes verstattet.

§. 53.

Die Anwendung der vorhergehenden Regeln findet keine Schwierigkeit, weil jede Function differenziirt, und als der Ausdruck für eine beständige Gröſse, eben dadurch auf Null gebracht werden kann. Es läſst sich aber nicht sogleich erkennen, ob der erhaltene Werth der veränderlichen Gröſse, auf ein Gröſstes oder Kleinstes hindeutet. Um dies zu entscheiden ist folgende Regel zu beobachten:

5. Man vermehre oder vermindere den in die anfängliche Gleichung eingeführten, durch Differenziation gefundenen Werth der veränderlichen Gröſse um etwas Weniges: so wird sich zeigen, ob die Summe aller Glieder in der Gleichung dadurch noch gröſser, oder ob sie kleiner wird.

Im erstern Fall kann bloſs ein Kleinstes, und nur im letztern ein Gröſstes angenommen werden. Denn es würde widersinnig seyn, einerseits das Gefundene für ein Gröſstes zu halten, wenn es durch die Zugabe einer Kleinigkeit noch gröſser würde, und andererseits das Gefundene für ein Kleinstes anzusehen, wenn es durch eine kleine Veränderung des Werthes der veränderlichen

Gröſse doch noch kleiner ausfiele. Folgende sehr einfachen Beispiele können hier zur Erläuterung dienen, und in Hinsicht der Bestimmung des Gröſsten oder Kleinsten auf eine allgemeine Regel führen, welche die fortgesetzte Differenziation an die Hand giebt. Es sey:

α.) $y = 12x - x^2 + 4$, so ist das Differenzial $\partial y = 0 = 12\partial x - 2x\partial x$, und $x = 6$, folglich $y = 12 . 6 - 36 + 4 = 40$. Vermehrt man 6 um 1, so kommt $12(6+1) - (6+1)^2 + 4 = 84 - 49 + 4$, und die Verminderung um 1 giebt $12(6-1) - (6-1)^2 + 4 = 60 - 25 + 4$. Zieht man von beiden letzteren Summen die erste ab, so bleibt in jedem Fall ein negativer Unterschied $= - 1$. Dieser zeigt an, daſs die erste Summe gröſser ist, als jede von beiden letztern, und daſs jene weder durch eine Zugabe noch durch einen Abzug von dem gefundenen Werthe 6, hat gröſser werden können. Sie muſs also schon das Gröſste seyn.

β.) Differenziirt man die Function $y = x^2 + \frac{128}{x}$, so kommt $0 = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$ oder $0 . x^2 = 2x^3 - 128$, folglich $x = \sqrt[3]{64} = 4$. Die Einführung dieses Werthes in die anfängliche Gleichung giebt $4 . 4 + \frac{128}{4} = 48$. Wird 4 um 1 vermindert, so erhält man $9 + 42{,}666 = 51{,}66$; durch Vermehrung um 1 aber $25 + 25{,}6 = 50{,}6$. Der Abzug der ersten Summe von jeder dieser letztern, läſst einen positiven Unterschied $= + 3{,}666$ und $+ 2{,}6$, welches beweiset, daſs die erste Summe weder durch Vermehrung noch durch Verminderung des gefundenen Werths kleiner gemacht werden kann, folglich schon ein Kleinstes seyn muſs.

γ.) Das Verfahren unter α und β läſst sich verallgemeinern, wenn angenommen wird, es sey die durch die erste Differenziation erhaltene Form der Gleichung mit dem in ihr liegenden Werthe von x, das Verlangte. Um nun zu untersuchen, ob die Vergröſserung von x einen positiven oder negativen Unterschied, das heiſst ein Kleinstes oder Gröſstes gebe, kann man anstatt des obigen 1 die differenzielle Einheit ∂x zu der veränderlichen Gröſse hinzufügen, gehörig potenziren und hierauf das als Gröſstes oder Kleinstes Anzusehende, von der durch die Einführung eines zweiten Increments veränderten Function abziehen. Kommt hier ein negativer Unterschied zum Vorschein, so ist es ein Be-

weis, dafs der gefundene Werth von x nicht gröfser werden könne, folglich ein Gröfstes andeute; wenn aber der Unterschied positiv ausfällt, so folgt daraus die Unmöglichkeit einer Verkleinerung des Gefundenen, und der Beweis, dafs ein Kleinstes Statt finde. Betrachtet man aber das hier vorgeschriebene Verfahren genauer, so ist, mit Rücksicht auf die obigen Functionen unter α und β, weder $\partial x(12+0-2[x+\partial x])-(12\partial x-2x\partial x)$

$$\text{noch } \partial x\left[2(x+\partial x)-\frac{128+0}{(x+\partial x)^2}\right]-\left(2x\partial x-\frac{128\partial x}{x^2}\right)$$

etwas anders, als eine zweite Differenziation derselben. Hieraus geht nun die allgemeine Regel hervor:

6. Wird das nächstfolgende Differenzial einer durch Differenziation auf Null gebrachten Function negativ, so giebt der gefundene Werth der veränderlichen Gröfse ein Gröfstes; ist aber jenes positiv, so giebt er ein Kleinstes.

Man sieht leicht ein, dafs dieses Verfahren nicht auf die beiden ersten Differenziale eingeschränkt ist, wenn etwa das zweite $= 0$ werden sollte; denn man braucht es nur anzusehen, als wäre es die erste auf Null gebrachte Gleichung.

§. 54.

Auf diesen Vorstellungen hat Leibnitz die Lehre vom Gröfsten und Kleinsten in dem Aufsatze: Nova methodus pro Maximis et Minimis etc. in den Actis Eruditor. Lipsiens. pro anno 1684 gegründet. Er erwähnt in demselben ausdrücklich einer beständigen Gröfse a und ihres Differenzials $\partial a = 0$, durch welches die Gleichungen auf Null gebracht werden können. Dies ist allerdings natürlicher und begreiflicher, als wenn man in dem characteristischen Dreieck die Incremente der Coordinaten sich im Verhältnisse des Halbmessers und der Tangente, oder des Sinus und Cosinus denkt. Für die längste Ordinate in einer dazu geeigneten Curve, mufs die Tangente mit der Abscissen-Linie parallel gehen, also von dieser, oder von der Subtangente nicht mehr geschnitten werden, folglich unendlich lang seyn. Für eine unendlich lange Tangente am Kreise, wird der Cosinus Null. Wenn nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$ ein allgemeiner Ausdruck für eine an dem characteristischen Dreieck liegende Tangente seyn sollte: so müfste man entweder ∂x oder $\partial y = 0$ setzen, je nachdem das

eine oder andere den Cosinus mit Recht vorstellen könnte. Allein die Betrachtung dieser kleinen Figur (consideratio figuralis) begünstigt weder die Voraussetzung $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang } \varphi$, noch $\frac{\partial x}{\partial y} = \text{tang } \varphi$, weil die Tangente hier, zum Theil wenigstens mit dem kleinen Bogen ∂s, also mit demjenigen zusammenfällt, was im Kreise der Halbmesser ist. Diese Voraussetzung ist also gar zu gezwungen, als daſs man eine natürliche Abhängigkeit der Tangente von $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder von $\frac{\partial x}{\partial y}$ einsehen könnte, wenn diese Verbindungen wirkliche Ausdrücke für Tangenten seyn sollen, die mit der Abscissenlinie parallel gehen. Dazu kommt noch, daſs ∂x und ∂y nur so lange im Verhältnisse des Halbmessers und der Tangente, oder des Sinus und Cosinus im Kreise stehen können, als die Coordinaten rechtwinkelig sind. Folglich würde die obige Voraussetzung auch noch hiedurch beschränkt werden. Eher wäre zu verstatten, daſs man für den Fall, in welchem eine unendliche Tangente Statt finden muſs, auch eine unendliche Subtangente annehme. Hier würde $\frac{y\partial x}{\partial y} = \infty$, also $\partial y = 0$ gesetzt werden müssen. Indessen liegt auch in dieser Vorstellung ein sehr grosser Zwang; denn die Differenziation irgend einer Function z. B. $y^2 = a^2 - 2ax + x^2$, bringt die Form $\frac{y\partial y}{\partial x} = -a + x$ hervor. Diese ist aber kein Ausdruck für eine Subtangente, sondern für eine Subnormale. Nun giebt zwar, wenn $\partial y = 0$ angenommen wird, die vorhergehende Gleichung eine Subnormale $= 0$, welches die Normale mit der Ordinate zusammenfallend und die Tangente mit der Abscissenlinie gleichlaufend macht. Aber es läſst sich hier doch nicht ein Haupteinwurf beseitigen, daſs nämlich nicht alle Tangenten, z. B. die der Evolventen, mit der Abscissenlinie parallel sind. Alles dies Zwangvolle vermeidet die Lehre vom Gröſsten und Kleinsten, wenn sie von der ganz richtigen Vorstellung ausgeht, jedes Maximum und Minimum sey eine beständige Gröſse, so lange sich die Bedingungen nicht ändern, unter denen eins von beiden Statt finden kann. Auch hängt dann die Gröſse der Differenziale nicht von der zu betrachtenden Figur ab, sondern sie entstehen unmittelbar durch freie Differenziation irgend einer Function, sind also keinesweges an sich oder willkührlich Null, son-

dern darum, weil in diesem Fall eine Constante differenziirt werden muſs. Wenn übrigens bei Aufgaben dieser Art Functionen vorkommen, die mehr als Eine veränderliche Gröſse enthalten, so ist die Vorschrift zu befolgen:

7. Man differenziire nach den bekannten Regeln, sondere aber alles von einander ab, was mit einerlei Increment multiplicirt ist, bringe dann jeden abgesonderten Theil für sich auf Null, und leite daraus, nach der Theorie der algebraischen Gleichungen, das Gesuchte her.

Folgende Beispiele werden zur Erläuterung dienen.

α. Es sey die eingebildete Constante $b^n = ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$, so ist das Differenzial $\partial(b^n) = 0 = (3ay^2x^2 - 4y^2x^3 - 3y^3x^2)\,\partial x + (2ax^3y - 2x^4y - 3x^3y^2)\,\partial y$, und man hat

$$\begin{array}{l} 3a - 4x - 3y = 0 \\ 2a - 2x - 3y = 0 \\ \hline a - 2x \qquad = 0 \end{array}$$

folglich $x = \frac{1}{2}a$ und $y = \frac{1}{3}a$. Um zu bestimmen, ob diese Werthe ein Gröſstes oder Kleinstes geben, kann man entweder die hier auf Null gebrachten Gleichungen, oder auch, um unmittelbare zweite Differenziale zu erhalten, die durch ∂x und ∂y abgesonderten Glieder zum zweitenmal differenziiren, von neuem die obige Regel befolgend absondern, und solchergestalt alles auf Null bringen, endlich aber die für x und y erhaltenen Werthe einführen, um durch Vergleichung bestimmen zu können, ob die Summe der positiven Glieder etwas Gröſseres hervorbringt, als die Summe der negativen. Im gegenwärtigen Fall erhält man auf diese Weise

$$6ay - 12xy - 6y^2 + 6ax - 8ax^2 - 9xy = 0$$

$$\text{d. i. } 2a^2 - 2a^2 - \tfrac{2}{3}a^2 + 3a^2 - 2a^2 - \tfrac{3}{2}a^2 = 0$$

$$6ay - 8xy - 9y^2 + 2ax - 2x^2 - 6xy = 0$$

$$\text{d. i. } 2a^2 - \tfrac{4}{3}a^2 - a^2 + a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 - a^2 = 0.$$

Hieraus folgt $+ 8a^2$ gegen $- 14a^2$, also ein negativer Ueberschuſs, welcher anzeigt, daſs ein Gröſstes gefunden worden sey.

Mehrentheils behalten die Functionen, bei welchen es auf die Frage ankommt, ob ein Gröſstes oder Kleinstes Statt findet, ganz die Gestalt der gegebenen Gleichung, z. B. für eine noch unbekannte krumme Linie, oder für die berechnete Nutzwirkung einer Maschine. In andern Fällen aber ist eine gewisse

Vorbereitung nöthig, welche von der Betrachtung der zum Grunde liegenden geometrischen Figur u. s. w. abhängt. Als Beispiel dieser letztern Art kann folgende leichte Aufgabe dienen:

β. Eine grade Linie a in drei Theile x, y und $a-x-y$ so zu zerschneiden, dafs daraus ein gröfstes Dreieck zusammengesetzt werden könne. Die benöthigte Verbindung dieser Gröfsen, erfodert eine Anwendung des analytisch-trigonometrischen Lehrsatzes, dafs wenn die drei Seiten eines gradelinigen Dreiecks v, w, z heissen, und der eingeschlossene Raum s genannt wird, dieser letztere $= \frac{1}{4}\sqrt{(v+w+z)(w+z-v)(v+z-w)(v+w-z)}$ sey. Die vier Factoren unter dem Wurzelzeichen sind hier a, $a-2x$, $a-2y$, $2x+2y-a$, und man erhält $s=\frac{1}{4}\sqrt{(-a^4+4a^3x+4a^3y-12a^2xy-4a^2x^2+8ax^2y-4a^2y^2+8axy^2)}$.

Die erste Differenziation giebt, nach Anleitung der obigen Regeln, die Gleichungen

$$4a^3-12a^2y-8a^2x+16axy+8ay^2=0$$
$$4a^3-12a^2x-8a^2y+16axy+8ax^2=0$$
$$12a^2x-8a^2x-8ax^2=12a^2y-8a^2y-8ay^2,$$

aus denen auf $x=y=\frac{1}{3}a$, und wegen der negativen Differenz auch auf ein Gröfstes geschlossen werden mufs.

Von der Richtigkeit des Verfahrens, dafs nach geschehener Differenziation alles, was einerlei Increment hat, für sich $=0$ gesetzt werden dürfe, kann man sich leicht dadurch überzeugen, dafs wechselsweise nur die eine von beiden veränderlichen Gröfsen als unbeständig angesehen, und so differenziirt wird. Auf diese Weise kommt unter α einmal $(3ax^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3)\partial x=0$ und das anderemal $(2ax^3y-2x^4y-3x^3y^2)\partial y=0$: folglich mufs jede Summe für sich Null seyn.

§. 55.

Es leidet keinen Zweifel, dafs wenn man der Lehre vom Gröfsten und Kleinsten jederzeit die leibnitzischen Begriffe zum Grunde gelegt hätte, sie eben so genügend als lichtvoll gewesen seyn würde. Indessen haben neuere Mathematiker es für nöthig erachtet, dieser Theorie durch die taylorsche Reihe nachzuhelfen. Es läfst sich nicht leicht angeben, wiefern dadurch über sie mehr Licht verbreitet, oder ihr Verfahren erleichtert worden wäre. Denn einer grössern Aufklärung bedurfte es in der That nicht; und was das Differenziiren der

zu untersuchenden Functionen betrifft, so ist es hier mit Abkürzungen, wie fx, $f'x$ etc. oder $\partial f(x+i) = fx + i\,\frac{\partial fx}{\partial x} + \frac{i^2}{2}\,\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{i^3}{2.3}\,\frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}$ u. dgl. grade nicht abgethan, sondern jeder besondere Rechnungsfall erfodert eine ausführliche erste, zweite, und manchmal auch noch höhere Differenziation. Der Differenzial-Kalkul bedarf also zum bessern Verständnisse dieser Theorie, des taylorschen Satzes eben so wenig, als zu seiner eigenen sicherern Begründung. Da es hier nicht auf eine weitläuftige Untersuchung über die Vorzüge oder Nichtvorzüge der neuern Methode vor der leibnitzischen, sondern bloſs auf eine beiläufige Vergleichung beider ankommt: so wird es genügen, diejenige Form der taylorschen Reihe zu betrachten, welcher man sich zu bedienen pflegt, den Mechanismus der Operation in der Lehre vom Gröſsten und Kleinsten zu erklären, welches jedoch immer noch etwas anders ist, als eine deutliche Auseinandersetzung der Grundbegriffe dieser Wissenschaft.

„Wird $y = x^n$ angenommen, so ist $\partial y = nx^{n-1}\partial x$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$. Durch fortgesetzte Differenzio-Differenziation kommen die Ausdrücke: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, und allgemein $\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = n(n-1) \ldots\ldots (n-[m-1])x^{n-m}$. Hienach kann in der Binomialreihe der eine Theil jeder abgeleiteten Function von x ausgedrückt werden durch den Quotienten der beiderseitigen einander zugehörigen Incremente. Das giebt nun anstatt der nächstfolgenden Reihe, in welcher i einen sehr kleinen, sogenannten endlichen Bruch vorstellt

$$y \pm i' = x^n \pm nx^{n-1}.i + n(n-1)x^{n-2}.\frac{i^2}{2} \pm n(n-1)(n-2)x^{-3}.\frac{i^3}{2.3}$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}.\frac{i^4}{2.3.4} \pm \ldots\ldots$$

die umgeformte (taylorsche)

$$y \pm i' = y \pm \frac{\partial y}{\partial x} i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\frac{i^2}{2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.\frac{i^3}{2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.\frac{i^4}{2.3.4} \ldots$$

In dieser letztern stehen die Nenner $1\partial x$, $2\partial x^2$, $2.3\partial x^3$, $2.3.4\partial x^4 \ldots\ldots$ im Verhältnisse $\partial x : 2\partial x : 3\partial x : 4\partial x : 5\partial x$ u. s. f. Daraus folgt, daſs in ihr jedes nachfolgende Glied kleiner, als das vorhergehende, die Summe des zweiten und

vierten also gröſser, als die Summe des dritten und fünften und so fort, wie auch die Summe aller ungraden Glieder vom dritten an gerechnet, gröſser, als die Summe aller graden vom vierten an gerechnet sey, u. s. w."

„Setzt man den Coefficienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ im zweiten Gliede, entweder willkührlich oder aus irgend einem andern Grunde $= 0$: so muſs

$$\text{I. } y < y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{2.3.4} \ldots\ldots$$

$$\text{II. } y > y - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2} \mp \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{2.3} - \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{2.3.4} \ldots\ldots$$

ferner, wenn auch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ Null seyn sollen,

$$\text{III. } y < y + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{2.3.4} \pm \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{i^5}{2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

$$\text{IV. } y > y - \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^4}{2.3.4} \mp \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{i^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

werden. Angenommen, daſs irgend eine Function von x und y durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ auf Null gebracht worden sey: so muſs aus ihrem zweiten oder vierten Differenzial, weil nämlich das dritte wegen der Vorzeichnung zweideutig ist, bestimmt werden können, ob aus der ersten auf Null gebrachten Function ein Gröſstes oder Kleinstes erfolge. Denn wird das y vor dem Ungleichheits-Zeichen, als das Gröſste oder Kleinste betrachtet: so sind die Differenzial-Functionen theils Incremente, theils Decremente für das y hinter dem Zeichen. Im erstern Fall deuten sie an, daſs das y bloſs eine Vergröſserung, im letztern aber nur eine Verkleinerung leide, folglich hier ein Gröſstes und dort ein Kleinstes seyn müsse."

So läſst sich allerdings eine kurze Darstellung des mechanischen Ganges der gegenwärtigen Rechnung, auf die taylorsche Reihe bauen. Aber sie allein wird schwerlich dem tiefer Eindringenden die erste deutliche Einsicht verschaffen, warum hier grade dieser Mechanismus der Operation nöthig ist. Denn je mehr man sie als Rechnungs-Form für diesen Gegenstand zergliedert, desto mehr Fragen entstehen, welche aus ihr selbst nicht beantwortet werden können.

1. Wenn $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$ ist, so muſs für $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ auch nx^{n-1}, also $x = 0$ werden. Aber, wird man jetzt fragen, wie kann durch $x = 0$ auch nur ein einziges Glied Null werden, ohne daſs zugleich x^n, x^{n-2} und kurz die ganze Reihe verschwindet? —— Oder wie ist es möglich, daſs in ihr noch ein $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, $\partial^4 y$ u. s. w. gröſser als Null übrig bleibt, nachdem $\partial y = 0$ geworden ist, von welchem jene durchaus abhängig sind? ——

2. Es ist natürlich $y > y - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2}$, und $y < y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{2}$. Aber wie läſst sich hieraus unmittelbar etwas anders folgern, als daſs y auf der rechten Seite des Verbindungszeichens, dort eine Abnahme und hier eine Zunahme erleide? —— Zwischen dieser Veränderung und dem nothwendigen Daseyn eines Gröſsten oder Kleinsten, ist in der That noch eine groſse logische Kluft. Denn mit welchem Recht läſst sich schlieſsen, daſs das y darum, weil es kleiner wird, ein Gröſstes seyn müsse? Das Nicht-Gröſste kann ja gleichfalls durch einen Abzug kleiner, so wie das Nicht-Kleinste durch eine Zugabe gröſser werden.

3. Da bei sehr vielen Functionen gar kein Gröſstes oder Kleinstes Statt findet, obgleich sie ihr negatives oder positives zweites und viertes Differenzial haben: so giebt es manche dieser Differenziale, die in Hinsicht des Gröſsten und Kleinsten ohne alle Bedeutung sind. Wenn man aber aus der taylorschen Reihe nicht hinausgeht, so liegt in ihrer Form gar nichts, woraus die Unmöglichkeit eines Gröſsten und Kleinsten in manchen Fällen, das heiſst der Satz, daſs nicht jeder Function ein Maximum oder Minimum zukomme, schon im Voraus theoretisch erkannt werden könnte. Eben darum ist sie in diesem Theile der Analysis, nicht nur als begründendes sondern auch als bestimmendes Princip unvollständig, und bedarf der Beihülfe anderer algorithmischer Lehrsätze.

Hieraus folgt nun, daſs man der taylorschen Reihe den Vorzug nicht zugestehen könne, als habe sie die Lehre vom Gröſsten und Kleinsten besser begründet und einleuchtender gemacht, wie es durch die leibnitzische Vorstellungs-Art längst geschehen ist.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die höhere Mechanik.

§. 56.

Die Theorie der analytischen Functionen, welche in ihrem 1. Th. §. 9. alle Fictionen und alles Philosophiren über den Kalkul gänzlich abwies, fängt die Einleitung in die Mechanik mit Betrachtungen an, welche in der That nichts anders sind, als eine Art von Metaphysik, und zum Theil wirkliche Fictionen, deren der Differenzial-Kalkul weder zu seiner Begründung noch zu seiner Beglaubigung in der Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung bedarf. Er tritt hier wie reiner Kalkul auf, ohne eine weitere Vorbereitung, als diejenige, daſs die Bedingungen oder Gesetze gegeben werden, welchen gemäſs die Gröſsen, die entweder beständig oder veränderlich sind, miteinander verglichen, in Verbindung gebracht und berechnet werden müssen. Sein Verfahren zeichnet sich also auch hier durch die gröſste Einfachheit aus, und es bedarf keiner weiteren Erläuterung, indem es bereits im allgemeinen Differenzial-Kalkul erkläret, und als nothwendig dargelegt worden ist. Eine ganz kurze Uebersicht der lagrangeschen Einleitung in die höhere Mechanik wird hinreichen, den Unterschied sichtbar zu machen, der hier zwischen der leibnitzischen Differenzen-Methode und der Theorie der analytischen Functionen Statt findet. Die letztere bemerkt im 2. Th. in der Vorerinnerung zum §. 186, das Gesetz der Beharrung sey das erste Gesetz der Bewegung. Die allereinfachste Function in der Beziehung des Raumes auf die Zeit und Geschwindigkeit (§. 186.) sey $x = at$, die nächstfolgende einfache $x = bt^2$. Iene bezeichne die gleichförmige, diese die beschleunigte Bewegung. Aus beiden entstehe (§. 187.) eine zusammengesetzte Function $x = at + bt^2$. Es lasse sich zwar noch eine einfache Function $x = ct^3$ gedenken. Indessen eine einfache Bewegung dieser Art komme (§. 186.) in der Natur nicht vor; auch wisse man nicht, was c der Coefficient der Zeit vorstellen sollte, wenn man ihn abgesondert und unabhängig von den Geschwindigkeiten und Kräften betrachte. Setze man (§. 188.) den durchlaufenen Raum $= x$, die dabei verflossene Zeit $= t$, so lasse sich x durch $f't$ ausdrücken. Am Ende der Zeit $t + \vartheta$ werde der durchlaufene Raum $f(t + \vartheta)$ seyn, woher die Differenz

$f(t+\vartheta) - ft$ entstehe. Entwickele man die Function $f(t+\vartheta)$ nach den Potenzen des zweiten Binomial-Theils, so komme die Reihe

$$ft + \vartheta f't + \frac{\vartheta^2}{2} f''t + \frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t + \text{u. s. w.}$$

zum Vorschein, in welcher die vor der Zeit ϑ verflossene Zeit t, als eine beständige Gröſse, zugleich als das Ganze aller der Zeit ϑ entsprechenden Räume, und eben darum die nach dem ersten folgenden Glieder, als Partialbewegungen anzusehen seyen. Die erste Partialbewegung $\vartheta f't$ beziehe sich auf eine gleichförmige, die zweite $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$ auf eine beschleunigte Bewegung. Was die übrigen Partialbewegungen $\frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t$ u. s. w. betreffe, so sey es nicht nothwendig sie besonders zu betrachten, sondern man könne um so mehr bei dem Anfange der Zeit ϑ von ihr wegdenken, da das dritte Glied schon hindere, daſs die wahre Bewegung (?) ein einfaches Resultat von den beiden ersten Functionen seyn könne. Man dürfe nur ϑ klein genug annehmen, damit die aus $\vartheta f't$ und $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$ zusammengesetzte sich der wahren Bewegung mehr nähere, als irgend eine andere aus einer gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte solches könne. Werde ϑ klein genug angenommen, so drücke $\vartheta f't$ alles dasjenige aus, was nur Gleichförmiges in der vorhergehenden Bewegung seyn könne, so wie das Glied $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$ alles dasjenige bezeichne, was nur Gleichförmig-Beschleunigtes in der Bewegung enthalten seyn möge. Daher dürfe nun jede durch die Gleichung $x = ft$ vorgestellte gradelinige Bewegung am Ende der Zeit t, als aus einer gleichförmigen $f't$ und gleichförmig beschleunigten $\frac{1}{2}f''t$ zusammengesetzt betrachtet werden, und wenn die Ursachen, welche $\frac{1}{2}f''t$ hervorbringen, plötzlich aufhören, so komme die Bewegung nothwendig auf $f't$ zurück. Mehrere Erfahrungen über den Fall der Körper bestätigen diese Voraussetzung, die als Fundamentalprincip in der ganzen Theorie der Bewegung angesehen werden müsse. So stelle denn (§. 189.) in $x = ft$, bei der gradelinigen Bewegung, die Prime $f't$ die Geschwindigkeit, und die Secunde $\frac{1}{2}f''t$ die beschleunigende Kraft in irgend einem Zeitpuncte der Bewegung vor. Dies habe dem Newton als Leit-

faden gedient, indem er auf die Bewegung den Fluxions-Kalkul gründete. Es seyen also Raum, Geschwindigkeit und Kraft, als Functionen der Zeit, beziehungsweise durch die ursprüngliche Function ft, ihre erste abgeleitete $f't$, und Secunde $f''t$ vorgestellt: so daſs wenn man den Ausdruck für den Raum durch die Zeit kennt, man sogleich die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Kraft durch die directe Analysis der Functionen (Differenziation) haben werde. Bezeichne man durch x den Raum während der Zeit t, so sey wegen $x = ft$, x' die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t, und x'' die beschleunigende Kraft in demselben Augenblick. Das gebe eine Gleichung von der zweiten Ordnung zwischen t, x, x' und x'', aus welcher man die ursprüngliche Gleichung zwischen t und x, nach den Regeln der umgekehrten Analysis der Functionen (Integration) herleiten könne. In der Gleichung $x = at$ für die gleichförmige Bewegung, habe man daher $x' = a$ und $x'' = 0$. Es drücke folglich der Coefficient, als Verhältniſs des durchlaufenen Raumes zur Zeit, die Geschwindigkeit aus, und die beschleunigende Kraft sey Null. In der gleichförmig beschleunigten Bewegung $x = bt^2$, sey $x' = 2bt$ und $x'' = 2b$. Also sey die erlangte Geschwindigkeit der verflossenen Zeit proportional. Das allereinfachste und natürlichste Mittel, die beschleunigenden Kräfte zu vergleichen sey, daſs man die Kraft der Schwere an einem gegebenen Orte für die Einheit annehme, woraus für die schweren Körper die Ausdrücke

$$2b = 1,\ b = \tfrac{1}{2},\ \text{also}$$

$$x = \frac{t^2}{2},\ t = \sqrt{2x}\ \text{entspringen.}$$

Die krummlinige Bewegung (§. 190.) lasse sich ganz natürlich auf zwei oder drei gradelinige Bewegungen zurückbringen, je nachdem die beschriebene Curve eine einfache oder doppelte Krümmung habe. Beziehe sich diese Curve auf zwei oder drei rechtwinkelige Coordinaten, so sey klar, daſs für jeden Augenblick die Bestimmung des Puncts der Curve, wo das Bewegte sich befinde, von dem Werthe dieser Coordinaten abhänge, dergestalt daſs jede dieser Coordinaten eine durch die Zeit gegebene Function seyn müsse, und den gradelinigen Raum vorstellen könne, den das Bewegte durchlaufen habe, welches die Projection des wahren Bewegten auf jeder der drei Axen derselben Coordinaten sey. Wenn also die Bewegung in Einer Ebene vor sich gehe, so könne sie durch

die beiden Gleichungen $x = ft$ und $y = Ft$ vorgestellt werden, wo die Elimination von t die Gleichung für die durchlaufenen Linien x und y gebe. Wenn aber die Bewegung in verschiedenen Ebenen geschehe, so könne sie durch die drei Gleichungen $x = ft$, $y = Ft$ und $z = \varphi t$ vorgestellt werden, wo durch die Elimination von t zwei Gleichungen mit x, y und z hervorkommen, welche die mit doppelter Krümmung beschriebene Linie bestimmen.

Hieraus wird (§. 191 u. f.) das wichtige Gesetz von der Zerlegung der Geschwindigkeiten und Kräfte abgeleitet; ferner (§. 198.) gezeigt, der Effect einer gegebenen Kraft auf eine gegebene Masse, stehe im graden Verhältnisse der Kräfte, und im umgekehrten der Massen, oder verhalte sich, wie die Kräfte dividirt durch die Massen. Zur Bestätigung dieses Princips beruft sich der Verfasser auf die Erfahrung vermittelst der Stoſs- und Fall-Maschine. Dann folgt (§. 199.) die Schätzung der Kräfte, weiter (§. 214.) die Lehre vom Mittelpuncte der Schwere, (§. 219.) vom Princip der Erhaltung lebendiger Kräfte, (§. 222.) der Unterschied der activen und passiven Kräfte, und seine Wichtigkeit in der Theorie der Maschinen. Den Beschluſs macht eine Darstellung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit, gegründet auf das Gleichgewicht an Kloben.

§. 57.

Unterwirft man den metaphysischen Theil dieser Einleitung in die höhere Mechanik einer genauern Prüfung, so zeigen sich verschiedene willkührliche Voraussetzungen, welche durch keine allgemeinen Begriffe oder Grundsätze der Bewegungslehre zu rechtfertigen sind.

1. Es kann freilich nicht geläugnet werden, daſs $x = at$ die einfachste Function der Bewegung sey, indem sich hier die durchlaufenen Räume wie die Zeiten verhalten, und at nichts anders ist, als die Summe der in der Zeit t durchlaufenen gleichen Räume $a + a + a +$ u. s. w. Zugleich muſs man einräumen, daſs $x = bt^2$ eine andere und $x = ct^3$ wieder eine andere Bewegung mit sich bringe, als $x = at$, weil die Geschwindigkeiten in jeder folgenden Zeiteinheit einen Zuwachs erhalten. Auch folgt noch aus der bloſsen Gleichung $x = bt^2$, daſs hier eine gleichförmig beschleunigte Bewegung Statt finde, weil der Zuwachs der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit gleich groſs ist. Eben so geht aus der

dritten Gleichung $x = ct^3$ von selbst hervor, daſs sie keine gleichförmig beschleunigte mehr seyn könne; denn die Reihen, welche man hier unter der Voraussetzung $a = b = c$ erhält, sind folgende *):

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots$$
$$1 + 7 + 19 + 37 + 61 + \ldots\ldots$$

unter denen die zweite vom ersten, und die dritte vom zweiten Range ist. Endlich muſs noch zugestanden werden, daſs $x = at + bt^2$ eine Art von Bewegung sey, die in der Erfahrung Statt finden kann. Denn ein Körper darf nur seine beschleunigte Bewegung nach dem bereits gleichförmig zurückgelegten Wege at anfangen, oder umgekehrt: so ist jederzeit x gleich der ganzen Summe aller einzeln durchlaufenen Raumtheile.

Wenn aber auch behauptet wird, daſs $x = ct^3$ keine Bewegungs-Form sey, und eben deshalb nicht in Betrachtung gezogen werden könne: so widerstreitet dieses nicht nur der freien Einbildungs-Kraft, so etwas als möglich zu denken, sondern auch der Erfahrung. Denn da $x = ct^3$ eine Reihe vom zweiten Range giebt, wenn man die in jeder Zeiteinheit besonders durchlaufenen Räume $c[t^3 - (t-1)^3]$ als Glieder miteinander verbindet: so ist diese Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte, wo in verschiedenen unmittelbar aufeinander folgenden Zeiteinheiten ungleiche Zunahmen der Geschwindigkeit Statt finden. Eine solche Bewegung ist nicht nur gedenkbar, sondern sie kommt auch in der Erfahrung vor, so oft die Abstände groſs genug sind, um die beschleunigende Kraft im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate von jenen zu vergröſsern oder zu vermindern. Wäre dies nicht, so würde freilich nur Eine Art von stetig wachsender oder abnehmender Bewegung Statt finden, nämlich die gleichförmig beschleunigte oder verzögerte. Aber diese Einschränkung fällt ganz weg, und eben darum ist die Vernachlässigung der Bewegungs-Form $x = ct^3$ bloſse Willkühr.

2. Da nun $x = ct^3$ keinesweges als unmöglich ausgeschlossen ist: so kann auch die Nothwendigkeit, daſs die Bewegung in der Körperwelt da, wo man die

*) Diese Reihen sind die Differenzen der natürlichen Zahlen in der ersten, zweiten und dritten Potenz, und ihre Glieder bezeichnen die in jeder Zeiteinheit besonders durchlaufenen Räume.

bewegende Kraft der Schwere = 1 setzt, eine gleichförmig beschleunigte seyn müsse, nicht aus dem gänzlichen Mangel einer andern Form als $x = bt^2$ gefolgert werden; sondern dieser Satz bedarf anderweitige Beweisgründe.

3. Es ist eine Verwechselung des Bedingungs-Verhältnisses (der Priorität nämlich) wenn man den Satz, die Bewegung frei fallender Körper sey eine gleichförmig beschleunigte, voranschickt, um die Voraussetzung daraus herzuleiten, daſs die während der Beschleunigung erlangten Geschwindigkeiten der Körper sich wie die verflossenen gleichen Zeittheile verhalten. Da aus diesem letztern, als dem Vordersatze, die Wahrheit des obigen als des Schluſssatzes gefolgert werden sollte, so müſste der Vordersatz nicht erst durch den Schluſssatz bewiesen werden, zumal dieser selbst, nach Num. 2, noch eines andern, als des hier gegebenen Beweises bedarf.

4. Es ist befremdend, wenn die Theorie der analytischen Functionen im §. 188 Differenzen braucht, und gleichwohl keine Differenziale in ihrem Kalkul anwendet, sondern die zweite abgeleitete Function, wie $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$, die im Differenzial-Kalkul schon, als nichtgehörig zum Differenzial, wegfallen muſs, beibehält, um sich in der Folge die Entwickelung der Ausdrücke für die gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung leicht zu machen. Diese Ableitung von dem beibehaltenen dritten Binomialgliede, ist nach der Methode der Differenzen, welche hier doch auch angewandt wird, ganz unzuläſslich *).

5. Um in der Binomial-Potenz das vierte, oder in der ersten Differenzen-Reihe das dritte Glied wegzuschaffen, wird gefodert, es solle der zweite Binomialtheil ϑ (das Increment) ja recht klein genommen werden. Ohne hier von neuem der Theorie der analytischen Functionen die Vorwürfe zurück zu schieben, welche sie in ihrem ersten Theil dem Differenzial-Kalkul wegen des ihm aufgebürdeten Unendlich-Kleinen macht, braucht nur soviel bemerkt zu werden, daſs die vorhergehende Foderung deshalb so dringend ist, weil man sonst nicht die überflüssigen Binomialglieder, mit Hülfe des bekannten Fundamentalsatzes aus §. 14, los werden könnte. Aber nun fragt es sich, warum jener Fundamentalsatz hier die zweite abgeleitete Function stehen läſst, da doch in der all-

*) Unstreitig würde sowohl der Erfinder des Differenzial-Kalkuls, als auch Joh. Bernoulli sie gemiſsbilligt haben.

gemeinen Theorie der directen Analysis (der Differenziations-Lehre) dies nicht verstattet wurde. Was für Resultate würde der Functionen-Kalkul in der höhern Analysis überhaupt geben, wenn das was hier geschieht, bei ihm zur allgemeinen Regel werden sollte? — — Er legt doch offenbar Widerspruch in den Mechanismus seiner Operation. Eben daher mufs nachgewiesen werden, wie bei diesem Widerspruch die Richtigkeit der analytischen Functionen in ihrem reinen und angewandten Theile bestehen könne.

6. Es wird behauptet, der dritte Differenzen-Theil $\frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t$ hindere, dafs die wahre Bewegung ein einfaches Resultat der beiden Functionen $\vartheta f't$ und $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$ sey. Aber was heifst hier wahre Bewegung? Etwa die wirkliche Bewegung, so wie sie in der Erfahrung beobachtet wird? — — Diese Bedeutung scheint hier gemeint worden zu seyn; denn es ist ausser der reinen Theorie kein anderer Weg vorhanden, um zur Erkenntnifs der Wahrheit zu gelangen, und die Theorie selbst ist, wie man sieht, hier eben erst im Werden begriffen. Aber wo sind nun wohl solche Erfahrungen zu machen, das heifst solche Beobachtungen und Versuche anzustellen, welche grade das als wahr anschauen lassen, was hier dafür angenommen wird, nämlich die wahre Bewegung sey ein einfaches Resultat der beiden Functionen $\vartheta f t$ und $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$? — — Diese beiden Functionen sind Differenzen-Glieder eines potenzirten Monoms t^n und Binoms $(t + \vartheta)^n$, das erste von beiden ein beständiges, das zweite ein unbeständiges, und jenes ist im höhern Kalkul allerdings nöthig, um ein Differenzial zu erhalten. Aber es würde sehr unrichtig seyn, wenn man die leibnitzische Rechnung mit veränderlichen Gröfsen hier als Maafsstab gebraucht, die Differenzentheile für die wahre veränderliche Bewegung anzusehen; denn diese besteht offenbar in jeder auf die erste folgenden Zeiteinheit, aus der Summe der Anfangs-Gröfse (primitiven Function) und ihrer bereits erhaltenen Incremente oder Decremente. Daher müfste der Functionen-Kalkul schon im zweiten Gliede der ersten leibnitzischen allgemeinen Hauptreihe, den Ausdruck

$$ft + \vartheta f t + \frac{\vartheta^2}{2} f''t + \frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t + \text{u. s. w.}$$

gebrauchen, um die vollständige algorithmische Form (abgesehen von den

Differenzialen) und nicht ein bloſses Bruchstück der Bewegung darzustellen. Mit welchem Recht läſst sich hier behaupten: ein Theil des augenblicklichen Zuwachses (momentanen Increments ϑ) und zwar nur zwei Glieder von den Potenzen desselben seyen die wahre Bewegung? —— Ist es dem Functionen-Kalkul um Einfachheit zu thun, und läſst er deshalb die primitive mit der dritten und den folgenden abgeleiteten Functionen weg, warum hält er den Theil $\frac{\vartheta^2}{2}f''t$ zurück? —— Dies letztere Verfahren weicht von den Gesetzen des leibnitzischen Differenzial-Kalkuls dermaſsen ab, daſs es durch ihn keinesweges gerechtfertigt werden kann, sondern mit ihm gradezu im Widerspruch steht.

7. Es ist ein unerweislicher Satz, daſs wenn der Binomialtheil ϑ klein genug angenommen werde, $\vartheta f't$ alles dasjenige ausdrücke, was nur Gleichförmiges in der vorhergehenden Bewegung seyn konnte. Fürs Erste muſs man fragen: wann ist ϑ klein genug? —— Kann hier kein bestimmtes Maaſs der Kleinheit festgesetzt werden: so ist natürlich jeder Schluſs, daſs nun ϑ schon das Gleichförmige in der vorhergehenden Bewegung ausdrücke, höchst unsicher. Fürs Zweite, was ist denn das Gleichförmige in der vorhergehenden Bewegung, welches sich durch $\vartheta f't$ ausdrücken läſst? Ist es durchaus nothwendig, daſs in ihr so etwas liegen müsse? —— Iede gleichförmig beschleunigte Bewegung, bringt während der ersten Zeiteinheit die Gröſse $x = b$ hervor, welche ein Raum ist, und freilich so angesehen werden kann, als wenn seine einzelnen, durch die gleichen Unterabschnitte der Zeiteinheit abgemessenen Theile, nicht voneinander verschieden wären. Aber nothwendig ist es grade nicht, sich die Sache so vorzustellen; denn es läſst sich b auch sehr wohl durch eine schon in den kleinstmöglichen Bruchtheilen liegende gleichförmig beschleunigte Bewegung zu Stande bringen. Hier steht also Hypothese gegen Hypothese, welches zu keiner Entscheidung führen kann. Aber angenommen, daſs die Bewegung in dem Raume b entweder ganz oder zum Theil gleichförmig seyn müsse: was heiſst es nun, die abgeleitete Function $\vartheta f't$ drückt das Gleichförmige in b aus? —— Ist b ganz gleichförmig entstanden, so wird hiemit behauptet: der Differenzentheil $\vartheta f't$ sey entweder der Gröſse b gleich, oder ihr proportional. Für das Erstere sind keine Gründe vorhanden, zumal der

Coefficient ϑ ausserordentlich klein seyn soll, und eben deswegen $\vartheta f't$ nicht ft gleich seyn kann: daher kann bloſs das Letztere gemeint werden. Aber welche Proportionalität soll denn hier Statt finden, wo das Verhältniſs $b : \vartheta f't$ durch kein anderes bekannte bestimmt wird? Die Annahme, daſs $\vartheta f't$ dem ganz gleichförmig entstandenen b proportional sey, hat also keinen Sinn. Wenn nun im Gegentheil angenommen wird, es sey in b der eine Theil der Bewegung gleichförmig, der andere gleichförmig beschleunigt: so leidet die Behauptung, $\vartheta f't$ drücke das Gleichförmige, $\frac{\vartheta^2}{2}f''t$ das Ungleichförmige aus, hier eben so wenig wie vorhin die Auslegung, es sey $\vartheta f't = \frac{m}{n}b$ und $\frac{\vartheta^2}{2}f''t = b\left(1 - \frac{m}{n}\right)$, oder es verhalte sich $b : b\left(1 - \frac{m}{n}\right) = \vartheta f't : \frac{\vartheta^2}{2}f''t$; denn wie läſst sich das beweisen? Folglich muſs man verstehen, es stelle vor (repräsentire) $\vartheta f't$ das Gleichförmige, und $\frac{\vartheta^2}{2}f''t$ das Gleichförmig-Beschleunigte in b. Aber dies führt wieder auf den ersten Streitpunct zurück, wo der Hypothese, b müsse zum Theil gleichförmig, zum Theil gleichförmig beschleunigt durchlaufen werden, die andere Hypothese entgegensteht, es könne auch durch bloſs gleichförmig beschleunigte, oder vom ersten Augenblick stetig wachsende Bewegung geschehen. Die Wahrheit ist, daſs wenn bt^2, wie oben, als eine Function von x angesehen wird, in den Reihen

$$x, \quad x+i, \quad x+2i, \quad x+3i, \ldots \quad x+(n-1)i$$

$$bt^2, \quad bt^2+2bt\vartheta, \quad bt^2+4bt\vartheta, \quad bt^2+6bt\vartheta, \ldots \quad bt^2+2(n-1)bt\vartheta$$

die Gröſse $i = 2bt\vartheta = \vartheta f't$ den gleichförmigen Theil der Bewegung (das Differenzial), die Summe der primitiven Function ft und des $(n-1)$-fachen Increments aber das Gleichförmig-Beschleunigte derselben ausdrückt. Die abgeleitete Function $\frac{\vartheta^2}{2}f''t$ hat, vermöge der Natur einer differenziell veränderten Gröſse, im Differenzial-Kalkul ganz und gar keine Beziehung mehr auf das Gleichförmig-Beschleunigte, das heiſst auf die einzelnen Glieder in der ununterbrochen fortlaufenden Reihe.

8. Hienach läſst sich nun auch über das in der Theorie der analytischen Functionen aufgestellte Fundamental-Princip der höhern Mechanik urtheilen.

Soll der Satz, 'daſs eine plötzliche Vernichtung der Ursache der Beschleunigung bloſs den gleichförmigen Theil der Bewegung übrig lasse, nur soviel heissen als : „wo die beschleunigende Kraft wegfällt, da fällt auch die fernere Beschleunigung weg", dann ist er völlig wahr. Wenn er aber so verstanden wird, daſs mit der Zernichtung der beschleunigenden Kraft, bloſs der symbolische Theil $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$ verschwinde, und $\vartheta f't$ allein übrig bleibe : dann widerstreitet er den Gesetzen der Veränderung nicht nur bezeichneter, sondern auch bezeichnender (symbolischer) Gröſsen offenbar. Es ist nämlich, wenn in den vorhergehenden Reihen unter Num. 7. die beschleunigende Kraft mit dem $(n-m)$ten Gliede plötzlich aufhört, das Beständige oder Gleichförmige der noch fortdauernden Bewegung nicht $\vartheta f't$, sondern unläugbar $bt^2 + 2(n-m)bt\vartheta = ft + (n-m)\vartheta f't$. Diese Abweichung der phoronomischen Principien in der Theorie der analytischen Functionen, von den Grundbegriffen des leibnitzischen Differenzial-Kalkuls ist zu groſs, als daſs jetzt noch eine beständige Uebereinstimmung in den Resultaten beider Methoden zu erwarten wäre.

9. Da aus dem Vorhergehenden erhellet, daſs die phoronomische Metaphysik in der Theorie der analytischen Functionen, zum Theil auf willkührlichen Erklärungen, zum Theil auf unsichern Voraussetzungen beruhet : so kann sie nicht als das Kriterium angesehen werden, nach welchem das Verfahren des Differenzial-Kalkuls in der höhern Mechanik beurtheilt werden müſste.

10. Endlich ist noch an dieser Philosophie auszusetzen, daſs sie verschiedene Sätze der Mechanik, nicht aus allgemeinen phoronomischen Begriffen, sondern aus einzelnen besonderen Fällen herleitet. Dies gilt unter andern von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit, welches hier durch das Gesetz der Kloben bewiesen worden ist, wobei bemerkt wird, daſs die gewöhnlichen Beweise unzulänglich seyen; weil sie sich entweder auf das Princip des Gleichgewichts am Hebel, oder auf das Princip der Zerlegung der Kräfte stützen, welchen beiden es an Evidenz fehle.

§. 58.

Bei der Anwendung des Differenzial-Kalkuls auf Gegenstände der Mechanik, ist es gar nicht nöthig, eine andere Philosophie vorangehen zu lassen, als die

allgemeinen Begriffe und Grundgesetze der Bewegungs-Lehre. Denn es kommt überall nur auf die Frage an, ob die zu berechnenden Gröſsen beständig oder veränderlich sind. Im erstern Fall reicht der niedere Kalkul aus; im letztern müssen Differenziale gebraucht und integrirt werden. Hiebei ist nun gar nicht nöthig zu untersuchen, wie die veränderlichen Gröſsen, z. B. die gleichförmig oder ungleichförmig beschleunigte Bewegung, zu Stande kommen mögen, ob die Natur hier das Gesetz der Stetigkeit befolgt, und sie von Augenblick zu Augenblick allmählig (continue) oder nach Verlauf einer gewissen Summe von Augenblicken plötzlich (saltu) vergröſsert oder vermindert. Genug wenn die veränderlichen Gröſsen so beschaffen sind, daſs aus ihnen ein beständiger Theil durch das Differenziiren ausgesondert, und zu gewöhnlichen Verhältnissen oder Gleichungen angewandt werden kann. Wie groſs dieser beständige Theil, dieses Differenzial seyn müsse, das ist eine sehr überflüssige Frage, um so mehr da man sich von dem Zwange der Figuren-Betrachtung in der Mechanik mehrentheils frei machen, und die linearischen etc. Gröſsen als bloſs numerische behandeln kann. Am allerwenigsten ist es Bedürfniſs, die Incremente oder Decremente in der unbestimmt kleinen Zeiteinheit ∂t recht klein, oder gar unendlich klein anzunehmen; denn warum die zweite, dritte und folgenden abgeleiteten Functionen in den Differenzen weggelassen werden müssen, das ist schon oben gezeigt worden; und in der Mechanik ist kein anderer Differenzial-Kalkul nöthig, als der allgemeine. Auch kann die Besorgniſs, als würde man ohne die Annahme unendlich kleiner Fallhöhen ∂x, ∂z u. s. w. das Recht verlieren, gewisse Bewegungsgröſsen, wie unter andern $v\partial t = \partial x$ als unveränderlich zu betrachten, ganz bei Seite gesetzt werden; weil hier überall nur die Rede von Differenzen seyn kann, die in jeder beständigen Zeiteinheit ∂t einerlei bleiben. Ist man nur gewiſs, daſs $v\partial t$ und ∂x ein wahres Differenzial seyn muſs, dann hat es übrigens mit der Erklärung der Entstehungs- und Bestehungs-Art dieser Groſsen keine Noth; weil sie in dieser Gestalt als unveränderlich betrachtet werden müssen. Und das ist schon ein hinreichender Grund, bei ihnen dasselbe Verfahren zu beobachten, welches bei ähnlichen algebraischen Gleichungen, wie bei den Ausdrücken für die gleichförmige Bewegung, nämlich $ct = s$, $t = \frac{s}{c}$ u. dgl. arithmetisch nothwendig ist. Iede Metaphysik der Phoronomie,

welche hier die Gränzen dieser gewiſs nicht schwankenden Grundbegriffe neben den feststehenden Bedeutungen solcher bezeichnenden Gröſsen, wie $v\partial t = \partial x$, $2g\frac{p}{m}\partial x = v\partial v$, $\frac{p}{m}\partial x = \partial z$ etc. überschreitet, und es aus der unerklärlichen Beschaffenheit eines Unendlich-Kleinen (was nicht Etwas, nicht Null seyn soll) begreiflich machen will, wie ∂x einen mit gleichförmiger Bewegung durchlaufenen Raum vorstellen könne, die artet in eine müſsige und unfruchtbare Grübelei aus. Hätte Joh. Bernoulli dies bedacht, so würde er schwerlich im Commerc. philos. et mathem. Tom. I. pag. 411. die unhaltbare Meinung geäussert haben, wenn der Differenzial-Kalkul nicht vom Unendlich-Kleinen ausgehe, so könne er die Gröſsen sich nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit, sondern bloſs durch Sprünge verändern lassen. Man hat späterhin Leibnitzen gradezu aufgebürdet: er nehme an, daſs seine Incremente und Decremente am Ende der kleinen Zeiteinheiten ∂t, $\partial^2 t$ u. dgl. sprungweise hinzukämen. Wie hätte er dies zu behaupten Ursache gehabt, da die Einrichtung seines Kalkuls in gleichen Zeittheilen bloſs erste, zweite etc. Differenzen von der Art erfodert, daſs man erste, zweite etc. Differenziale erhalten kann, und es lediglich auf das Haben derselben, aber nicht auf die überflüssige Untersuchung ankommt, wie man sie hat. Denn diese letztere ist etwas ganz Ausserwesentliches; auch muſs man gewiſs, am Ende aller metaphysischen Speculation über die Möglichkeit einer gleichförmigen Bewegung in einer nichtgleichförmigen, unverrichteter Sache wieder auf den Standpunct zurückkehren, wo bloſs der Begriff und die Natur der Sache es mit sich bringt, daſs ein phoronomisches Differenzial ebenfalls in die Klasse der unveränderlichen Gröſsen, wie $ct = s$ u. dgl. gestellt werde, und Räume vorstelle, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen sind. Mag das wirklich so seyn, oder bloſs so vorgestellt, wobei immerhin wechselnde Geschwindigkeiten sich dergestalt compensiren dürften, daſs mit jedem Zeittheil dieselben Differenzen oder Differenzio-Differenzen zum Vorschein kämen; kurz! sie bleiben in gleichen verflossenen Zeiten gleich, weshalb sie für den Kalkul beständige Gröſsen sind. Besser also, man begnügt sich mit dieser lichtvollen Ueberzeugung, als daſs man, vom sichern Wege der Analysis abschweifend, ein Nichts herausgrübelt, nämlich einen gleichförmig durchlaufenen Raum der Null ist, folglich alle Bewegung zernichtet. Das heiſst doch

offenbar, sich eine Bewegung denken, die keine Bewegung ist. Es kann als ein sicheres Kennzeichen dienen, dafs eine Metaphysik sich für die Bewegungslehre nicht eignet, wenn sie auf leere Spitzfindigkeiten oder gar auf Widersprüche führet. Die wahre Philosophie der höhern Mechanik besteht hauptsächlich darin,

1. dafs man die reine Theorie von allgemeinen phoronomischen Begriffen und Gesetzen ableitet; denn sie mufs vom Allgemeinen zum Besondern herabsteigen. Dabei ist es nöthig, alle Grundbegriffe und Grundsätze dieser Wissenschaft vollständig aufzuzählen *); weil sich dann erst jeder besondere Lehrsatz einleuchtend beweisen läfst.

2. Es mufs für jede veränderliche Gröfse eine ihr entsprechende Veränderungsform derjenigen Reihe gebraucht werden, welche sie ausdrücken soll. Blofs unter dieser Bedingung läfst sich ihr wahres Differenzial finden.

3. Es giebt gewisse Gröfsen in der Mechanik, die sich so verändern, dafs sie eine kurze Zeit lang wachsen, und hierauf eben so abnehmen, um von neuem wieder gröfser und kleiner zu werden, folglich eine Reihe von dieser Gestalt bilden:

$$y,\ y+\partial y,\ y+\alpha\partial y,\ y+\beta\partial y,\ y-\gamma\partial y,\ y-\delta\partial y,\ y+\partial y,\ \text{u. s. w.}$$

Dieses abwechselnde Steigen und Fallen, verstattet nicht eine unmittelbare Differenziation; denn dazu müfste vorausgesetzt werden, dafs die veränderliche Gröfse entweder fortwährend wachse, oder fortwährend abnehme. Daher kann der Differenzial-Kalkul in solchen Rechnungsfällen blofs unter der Bedingung richtige Resultate geben, dafs es angeht für y, als Ordinate einer mit Wendepuncten versehenen Curve betrachtet, eine Gleichung, wenigstens eine annähernde zu finden.

4. Man mufs nicht glauben, als wenn jede mögliche veränderliche Gröfse fähig wäre, mit Hülfe des Differenzial-Kalkuls berechnet zu werden; denn wenn sie sich ohne ein bestimmtes Gesetz verändert, so ist der Kalkul, der in allen seinen Operationen und Ausdrücken an bestimmte Regeln gebunden bleibt,

*) Ein vollständiges Verzeichnifs derselben, als Einleitung in die reine Mechanik möchte wohl noch nicht vorhanden seyn.

nicht im Stande, eine Veränderungsform darzustellen, welche mit jener völligen Gesetzlosigkeit übereinstimmen könnte. Hier ist jeder Aufwand analytischer Kunst vergebens, und man täuscht sich nur in seiner Erwartung; denn für eine Gröfse, die sich ohne alle Regel verändert, ist gar kein richtiges Differenzial, und eben darum auch kein wahres Integral zu finden. Leibnitz war hievon schon völlig überzeugt, deswegen schrieb er die merkwürdigen Worte nieder: „Cujuslibet certa lege variantis possumus invenire differentiam seu elementum." *) Es ist eben darum bei jeder neuen Untersuchung über einen Gegenstand der höhern Analysis nöthig, vorher eine Betrachtung über die Veränderungsform der in Rechnung zu nehmenden unbeständigen Gröfsen anzustellen.

5. Ueberhaupt läfst sich nicht erwarten, dafs der Differenzial-Kalkul blofs maschinenmäfsig Resultate geben soll, welche mit der Erfahrung übereinstimmen, es möge bei der anzustellenden Rechnung die eine oder die andere der obigen, im ersten Abschnitt aufgeführten, allgemeinen Hauptreihen, wie auch das erste oder ein höheres Differenzial zum Grunde gelegt werden. Es ist unvermeidlich, dafs die Rechnung von der Erfahrung abweicht, so oft entweder die bezeichnende Reihe (Function) zu der bezeichneten Gröfse nicht pafst, oder die ersten Differenzen der Reihe für beständig angesehen werden, wenn es die ersten Differenzen der bezeichneten Gröfse noch nicht sind. Iedes Rechnungs-Resultat, welches hervorgeht, ohne dafs man diese nöthige Rücksicht genommen hat, ist mifslich; und trifft es mit der Erfahrung zusammen, so ist das ein Ohngefehr, welches noch mehr vermieden werden sollte, als berichtigende Coefficienten der Integrale, wenn diese nicht gradezu mit der Erfahrung übereinstimmen wollen. Die erste Bedingung bei der Anwendung des Differenzial-Kalkuls auf Gegenstände der höhern Mechanik bleibt immer: Kenntnifs des Veränderungsgesetzes einer unbeständigen Gröfse.

6. Oft läfst sich dieses Gesetz, wenn es noch unbekannt ist, durch blofses Nachdenken ausfindig machen; aber wo das letztere nicht hinreicht, da sind genaue Beobachtungen und Versuche nöthig. Denn obgleich vorausgesetzt werden mufs, dafs jeder geübte Analyst, bei weiteren Untersuchungen im Gebiete der Mechanik von Grundsätzen, oder wenigstens von haltbaren Hypothesen aus-

*) Man sehe oben §. 37, und Op. omn. T. III. p. 421.

gehen wird: so ist man doch nicht sicher, daſs bloſses Nachdenken, sey es auch noch so scharfsinnig, die wahre Beschaffenheit einer unbeständigen Gröſse jedesmal herausbringt; weil die erforderlichen Reflexionen oft zu vielfältig und zu verwickelt sind, als daſs nicht Eins oder das Andere übersehen werden sollte. Verschiedene ungenügende Theorien in der Hydrodynamik, Aërodynamik und selbst in der Dynamik fester Körper, könnten hier zum Beweise dienen. Eben darum sind Beobachtungen und Versuche, für die Mechanik ein wichtiges Bedürfniſs. Allerdings hat man sowohl die ersteren, deren die Mechanik des Himmels ebenfalls bedarf, als auch die letztern, zum Behuf der irdischen Bewegungslehre oft genug angestellt, und ist manchmal dabei sehr ins Groſse gegangen; aber nur selten sind sie so fruchtbar ausgefallen, wie es zu wünschen gewesen wäre. Daher ist ihnen hin und wieder die Achtung nicht zu Theil geworden, auf welche sie beinahe schon um ihrer Benennung willen Anspruch machen durften. Indessen konnte es wohl seyn, daſs sie eine falsche Richtung genommen, oder auch einen unrechten Zweck gehabt hatten. Uebrigens ist es manchmal äusserst schwer, einen guten phoronomischen Versuch anzustellen; denn diese Benennung kommt ihm bloſs unter der Bedingung zu, daſs durch ihn allgemeinere Gesetze erkannt werden, nach welchen die Bewegungen der Körper unter verschiedenen Umständen vor sich gehen.

§. 59.

Folgender kurze Entwurf einiger Hauptlehren in der Mechanik, soll als Beweis dienen, daſs der Differenzial-Kalkul, bei seiner Anwendung auf diese Wissenschaft, überall nur der beständigen Differenzen, aber der Voraussetzung des ihm aufgebürdeten Unendlich-Kleinen gar nicht bedarf. Um übrigens methodisch zu verfahren, so mögen die Erklärungen, Grundbegriffe und Gesetze der Bewegung vorangeschickt werden, auf welche die folgenden, hin und wieder neuen Darstellungen einzelner Theorien gebaut worden sind.

I. Erklärungen.

1. Die Begränzung eines erfüllten Raumes nach allen drei Abmessungen, giebt einen materiellen Körper. Die Menge der Raum erfüllenden Theile heiſst seine Masse.

2. Das wahre oder scheinbare Abstandsverhältniſs der im Körper zerstreuten Puncte zu gegebenen Oertern im äussern Raum*), nennt man seine Lage.

3. Das Beharren in einerlei Lage heiſst Ruhe, ihr Wechsel Bewegung.

Anmerkung. Bei der letztern wird fortschreitende und drehende Bewegung unterschieden.

4. Die Ursache einer Bewegung, heiſst bewegende Kraft, und Widerstand, wenn sie einer andern Kraft entgegen wirkt.

5. Kräfte die ihre Bewegungen gegenseitig aufheben, erhalten sich im Gleichgewicht

6. Den Raum, welchen ein Körper in einer bestimmten Zeiteinheit (z. B. 1 Sec.) gleichförmig durchläuft, nennt man seine Geschwindigkeit; die Summe der Geschwindigkeiten während einer verflossenen Zeit, seinen zurückgelegten Weg. Daher die Ausdrücke $ct = s$ (Summe der Geschwindigkeiten), $c = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{c}$, $c + c' + c'' + \ldots\ldots = s'$.

Anmerkung. Bei wachsender oder abnehmender Geschwindigkeit, verträgt sich das Beschaffenheits-Wort gleichförmig nur dann mit dieser Definition, wenn man sowohl die Zunahmen als Abnahmen in jeder Zeiteinheit, sprungweise in Gedanken hinzufügt. Soll dies letztere nicht verstattet seyn, so muſs das gedachte Wort aus der Definition wegfallen.

7. Gleichbleibende Geschwindigkeit giebt eine gleichförmige Bewegung, wachsende eine beschleunigte, abnehmende eine verzögerte.

Anmerkung. Zu unterscheiden sind gleichförmig und ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung, nach Maaſsgabe der gleichen oder ungleichen Zu- oder Abnahmen in jeder Zeiteinheit.

II. Grundbegriffe der Mechanik, aus der Vergleichung der Ruhe und Bewegung abgeleitet.

1. Ruhe mit Ruhe verglichen giebt einerlei Gröſse, wenn gleich viele Theile eine gleich lange Zeit ruhend bleiben. Sind also die ruhenden Massen q und

*) Bei einem auf dem Erdboden ruhenden Rade, hat der unterste Punct den Abstand $= 0$, der oberste den wahren Abstand $= 2r$, alle übrigen haben den wahren Abstand $2r - n$, $2r - n'$ etc. welches die Abstandsverhältnisse $0 : 2r$, $0 : 2r - n$, $0 : 2r - n'$ u. s. w. giebt. Der Wechsel dieser in einem Körper liegenden Verhältnisse seiner Theile ist Bewegung.

q' gleich, so giebt die Wiederholung desselben Zustandes durch t Zeiteinheiten, oder ihre Dauer, den Ausdruck:

$$1 \,.\, q + 1 \,.\, q + 1 \,.\, q + \ldots\ldots = 1 \,.\, q' + 1 \,.\, q' + 1 \,.\, q' + \ldots\ldots$$

d. i. $$(1+1+1+1+\ldots\ldots)\,q = (1+1+1+1+\ldots\ldots)\,q'$$

oder $$t \,.\, q = t \,.\, q'.$$

2. Soll $qt > q't'$ seyn, so muſs entweder $q > q'$ oder $t > t'$ oder beides zugleich genommen werden.

Anmerkung. Hienach ist z. B. die Ruhe des Oceans etwas Gröſseres von Ruhe, als die Ruhe des Wassers in einer Cisterne, wenn $t = t'$ genommen wird.

3. Die Voraussetzung $qt = q't'$ giebt $q : q' = t' : t$, das heiſst: eine Gröſse der Ruhe ist der andern gleich, wenn die ruhenden Massen sich umgekehrt verhalten, wie die Zeiten (oder Dauer.)

Anmerkung. Hieraus läſst sich natürlich und leicht das Gesetz der Ruhe oder des Gleichgewichts am mathematischen Hebel herleiten.

4. Unruhe mit Unruhe verglichen, giebt einerlei Gröſse derselben, das heiſst der Bewegung, wenn gleiche Massen sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Aber eine durchgehend gleiche Geschwindigkeit der Massen, setzt nach der ersten Erklärung eine gleiche Geschwindigkeit aller Massentheile voraus. Folglich wird, bei der Vorstellung (Wahrnehmung oder auch Reflexion) des Einzelnen, an jedem Theile dieselbe Geschwindigkeit wiederholt. Das giebt eine Summe von Wiederholungen, welche der Summe aller Massen-Theile $= m$ gleich ist, folglich den Ausdruck $cm = cm'$, wenn $m = m'$ gesetzt wird.

5. Soll $cm > c'm'$ seyn, so muſs entweder $c > c'$, oder $m > m'$, oder auch beides zugleich angenommen werden.

6. Aus der Voraussetzung $cm = c'm'$ folgt $c : c' = m' : m$, das heiſst, bei gleichen Gröſsen der Bewegung verhalten sich die Massen umgekehrt, wie ihre Geschwindigkeiten.

Anmerkung. Daſs diese Vergleichungs-Formen der Bewegungs-Gröſsen reine Reflexionsbegriffe, und keine Lehnsätze (lemmata) sind, welche eines Beweises bedürften, läſst sich schon durch ähnliche Vergleichungsformen im gemeinen Leben rechtfertigen. Bei einem Volksaufstande z. B. stellt man die Unruhe desto gröſser vor, je mehr Individuen darin begrif-

fen sind, und je unruhiger jedes einzelne ist. Im entgegen gesetzten Fall wird die Unruhe kleiner genannt. Die Verallgemeinerung dieses Begriffs durch Abstraction, führet nothwendig auf die vorhergehende Vergleichungsform der Gröſse von Bewegungen.

III. Allgemeine Gesetze der Bewegung.

1. Ieder Körper beharret in der Ruhe oder Bewegung so lange, bis eine einwirkende Kraft ihn nöthigt, aus einem von beiden Zuständen in den andern überzugehen. (Gesetz der Beharrung.)

Beweis. Bewegung und Ruhe sind Wirkungen von Ursachen. Sollte die Bewegung in Ruhe übergehen, ohne eine einwirkende Kraft, so würde eine Wirkung ohne Ursache gedacht werden. Eben so im umgekehrten Fall. Beides ist gegen das Princip der Causalität.

2. Einwirkung und Zurückwirkung sind einander gleich.

Beweis. Ieder bei der Einwirkung angegriffene Theil einer Masse leistet einen Widerstand. Ie gröſser die Einwirkung ist, desto mehr Theile werden auf einmal angegriffen; aber desto mehr Theile widerstehen auch auf einmal.

Anmerkung. Verschiedene Erfahrungen machen dieses Gesetz anschaulich. Eine Stahlfeder, die 40 Pfund Kraft zu ihrer Spannung erfodert, muſs mit einer eben so groſsen Gewalt entgegen drücken; denn sonst wären keine 40 Pfund Spannkraft nöthig. Eben so verhält es sich mit zusammengedrückter Luft u. dgl.

3. Bei gleicher zu bewegenden Masse, ist die Bewegung der bewegenden Kraft proportional.

Beweis. Wenn eine Masse durchgängig die Bewegung q haben soll, so muſs auch jeder einzelne Massentheil sie haben. Daher erfodert ein jeder einen gleichen Antheil an der bewegenden Kraft. Wenn nun zwei verschiedene bewegende Kräfte p und p' unter gleiche Summen von Massentheilen $= m$ vertheilt werden sollen: so giebt $\frac{1}{m}p$ die Bewegung q, und $\frac{1}{m}p'$ die Bewegung q', woraus die Proportion entsteht $p : p' = q : q'$, das heiſst, die Bewegungen sind den bewegenden Kräften proportional.

Anmerkung. Die Erfahrung giebt erläuternde Beispiele genug, wie unter andern dieses: eine mit 80 Pfund gespannte Feder treibt dieselbe feste Masse, unter übrigens einerlei Umständen, schneller fort, als eine mit 15 Pfund gespannte.

4. Iede einzelne bewegende Kraft, theilt dem in Bewegung gesetzten Körper nur eine einzige Richtung mit.

Beweis. Kein Körper kann nach zwei verschiedenen Richtungen zugleich gehen. Daher müſste eine Kraft, welche ihm zwei Richtungen der Bewegung gäbe, etwas Unmögliches hervorbringen.

5. Zwei Kräfte, die zugleich einen Körper nach verschiedenen Richtungen in Bewegung setzen, lenken ihn gegenseitig von ihren Richtungen ab, und zwar im Verhältnisse ihrer Gröſsen.

Beweis. Lenkten sie ihn nicht ab, so müſste er sich nach zwei Richtungen zugleich bewegen, welches unmöglich ist. Lenkte ihn bloſs die eine ab, so würde die zweite eine Ursache ohne Wirkung seyn, welches einen Widerspruch im Begriff enthält. Sie lenken ihn also beide ab. Sollte dies nicht im Verhältnisse ihrer Gröſse geschehen, sondern im Verhältnisse $a : a$, so würde der Kraftüberschuſs auf der einen Seite gar nichts wirken; gegen den Begriff einer Kraft. Noch ungereimter würde es seyn, wenn die kleinere Kraft ihn mehr ablenken sollte, als die gröſsere. Daher sind die gegenseitigen Ablenkungen den ablenkenden Kräften proportional, zufolge des dritten Gesetzes.

6. Iede Kraft, welche unausgesetzt in einen bewegten Körper wirkt, ertheilt ihm eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung, je nachdem ihre Einwirkung entweder Mitwirkung oder Gegenwirkung ist.

Beweis. Vermöge der Beharrung bleibt der bewegte Körper schon für sich in Bewegung, nach dem ersten Gesetze. Kommt eine Mitwirkung hinzu, so muſs die anfängliche Wirkung vergröſsert, so wie durch eine Gegenwirkung verkleinert werden, zufolge des dritten Gesetzes. Die öftere Wiederholung der Mitwirkung oder Gegenwirkung, vermehrt oder vermindert also die Bewegung von Zeiteinheit zu Zeiteinheit.

§. 60.

I. Anwendung des Vorhergehenden auf die Lehre vom gleichförmig beschleunigten Fall.

1. Wenn die Schwere einen Körper nahe an der Oberfläche der Erde in der ersten Zeiteinheit lothrecht durch einen Raum $= 1$ führet, und solches in jeder folgenden wiederholt: so verhalten sich die nach und nach wachsenden Geschwindigkeiten, wie die verflossenen Zeiteinheiten. Denn der Körper nimmt, vermöge der Beharrung, in jeden nächstfolgenden Zeittheil hinüber, was er am Ende des nächstvorhergehenden bereits an Geschwindigkeit hatte. Das giebt die Reihe $0 + 1$, $1 + 1$, $2 + 1$, $3 + 1$, $4 + 1 \ldots\ldots (n-1) + 1$, übereinstimmend mit der Reihe der verflossenen Zeiteinheiten: folglich $1 : 1 = t : n$, wenn n den Coefficienten der Geschwindigkeit c bezeichnet.

2. Nennt man die Geschwindigkeit am Ende der ersten Zeitsecunde u, am Ende von t Secunden v: so ist dem Vorhergehenden zufolge $1 : t = u : v$, und $v = ut$. Nun sey das Differenzial der Zeit $= \partial t$, des in t Secunden durchlaufenen Raumes $s = \partial s$: so hat man die Gleichungen

$$v\partial t = \partial s = ut\partial t$$

$$\int v\partial t = s = \tfrac{1}{2}ut^2,$$

und für $t = 1$ den Raum $g = \frac{1}{2}u$: folglich durch Umtausch die Ausdrücke

$$s = gt^2 = \tfrac{1}{2}vt = \frac{v^2}{4g},$$

$$v = \frac{2s}{t} = 2gt = 2\sqrt{gs},$$

$$t = \sqrt{\frac{s}{g}} = \frac{2s}{v} = \frac{v}{2g},$$

in welchen g die freie Fallhöhe in der ersten Secunde, s den in t Secunden durchlaufenen freien Fallraum, und v die zur ganzen Fallhöhe s gehörige Geschwindigkeit (im letzten Augenblick) bezeichnet.

3. Ist die Frage, wie hoch ein Körper mit der Geschwindigkeit v lothrecht in die Höhe steigen könne, wenn vom Widerstande der Luft weggedacht wird, so kann man in Fig. 5. die veränderliche Höhe $AP = x$, also $Pp = \partial x$ setzen. In P soll der Körper von seiner anfänglichen Geschwindigkeit v schon so viel verloren haben, daſs sie nur noch einer gewissen, der unbestimmten Zeit t zu-

gehörigen Geschwindigkeit $u = 2gt$ gleich ist: so erhält man in der auf t folgenden kleinen Zeiteinheit ∂t die Veränderungen $u - \partial u$, weil u abnimmt, und $2g(t + \partial t)$, weil t zunimmt. Das giebt die Differenzial-Gleichung

$$- \partial u = + 2g\partial t,$$

und wegen $u\partial t = \partial x$, oder $\partial t = \frac{\partial x}{u}$, durch Umtausch den Ausdruck

$$- u\partial u = 2g\partial x,$$

dessen Integral

$$\text{Const.} - \tfrac{1}{2}u^2 = 2gx$$

ist. Für $x = 0$ wird $u = v$, also Const. $= \frac{1}{2}v^2$. Hieraus entsteht zunächst ein Ausdruck für die Geschwindigkeit u in der Höhe x, nämlich

$$u = \sqrt{(v^2 - 4gx)};$$

und für $u = 0$, wo x dem ganzen durchlaufenen Raum s gleich ist, ein Ausdruck für die Steighöhe $s = \frac{v^2}{4g}$, welcher ganz mit dem obigen übereinstimmt, wo v die zur Fallhöhe s gehörige Geschwindigkeit ist. Hieraus geht der Satz hervor, dafs ein Körper im freien Mittel mit der Geschwindigkeit v so hoch steigen kann, als er fallen müfste, um diese zu erlangen.

II. Vom Parallelogramm der Geschwindigkeit, und von der Zerlegung der Kräfte.

1. Man denke sich ein Paar Kräfte p und p', welche einem Körper zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen, unter dem Winkel $\varphi < 2R$, die Geschwindigkeiten v und u mittheilen: so würde der bewegte Punct (Schwerpunct) in der kleinen Zeiteinheit ∂t, nach der einen Richtung den Raum $v\partial t = \partial x$, nach der andern aber $u\partial t = \partial y$ durchlaufen. Er ist aber unterdessen von beiden Richtungen abgelenkt worden, zufolge des §. 59. Num. III. 3 und 5. Nach dem Verhältnisse der Kräfte und ihrer augenblicklichen Wirkungen, läfst sich das Verhältnifs dieser Ablenkungen durch $\partial x : \partial y = \partial x \sin\varphi : \partial y \sin\varphi$ bestimmen. Es sey nun der eine Ablenkungswinkel $= \omega$, so ist der andere $= \varphi - \omega$, weil beide $= \varphi$ seyn müssen. Hieraus entstehen folgende Proportionen:

$$\partial x : \partial y = \sin\omega : \sin(\varphi - \omega)$$

$$v\partial t : u\partial t = \sin\omega : \sin(\varphi - \omega)$$

$$v : u = \sin\omega : \sin(\varphi - \omega).$$

Die letztere giebt den Ausdruck $u \sin \omega = v(\sin \varphi . \cos \omega - \cos \varphi . \sin \omega)$, und wenn auf beiden Seiten durch $\cos \omega$ dividirt, nachher aber geordnet wird,

$$\tan \omega = \frac{\sin \varphi}{\frac{u}{v} \pm \cos \varphi},$$

wo das untere Zeichen für den Fall gilt, dafs φ stumpf, also $\cos \varphi$ negativ ist. Dieser zuletzt gefundene Ausdruck bestimmt die Lage einer Diagonale in einem Parallelogramms-Winkel φ, dessen Schenkel v und u sind. Hieraus folgt zuförderst, dafs der bewegte Körper eine mittlere Richtung nehmen mufs, welche mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen fällt, dessen Seiten v und u den Winkel φ einschliessen. Setzt man $\varphi = 2R$, so ist $\sin \varphi = 0$, folglich auch $\tan \omega = 0$, das heist, es giebt nun keinen Diagonalenwinkel $\omega > 0$, daher denn die mittlere Richtung mit derselben graden Linie zusammen fallen mufs, in welcher die Kräfte p und p' einander grade entgegen wirken.

2. Zufolge des §. 59. Num. I. 6, ist der in der kleinen Zeiteinheit ∂t zurückgelegte Weg einerlei mit der Summe der Geschwindigkeiten, welche der Körper in der mittlern Richtung während der Zeit ∂t hatte. Da das Verhältnifs dieser ihm von beiden bewegenden Kräften zugleich mitgetheilten Geschwindigkeiten, wieder durch das Verhältnifs $\partial x : \partial y$ bestimmt wird: so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial s &= \partial x \cos \omega + \partial y \cos(\varphi - \omega) \\ &= v\partial t . \cos \omega + u\partial t . \cos(\varphi - \omega) \\ s &= v . \cos \omega + u . \cos(\varphi - \omega) \end{aligned}$$

wenn $t = 1$ angenommen wird. Aber dieser zurückgelegte Weg s ist einerlei mit der Länge einer Diagonale des Winkels φ im Parallelogramm, welcher v und u zu Schenkeln hat. Hieraus folgt der Schlufs, dafs die mittlere Geschwindigkeit v' sich zu v und u verhalte, wie die Diagonale eines Parallelogramms zu seinen Seiten.

3. Da Bewegungen (Körpern mitgetheilte Geschwindigkeiten) und ihre zugehörigen bewegenden Kräfte proportional sind: so gelten die hier bewiesenen Sätze auch für die letztern, und wie die mittlere Geschwindigkeit nicht die Summe von $v + u$ ist, so kann auch die mittlere Kraft nicht $p + p' \doteq q'$ sondern blofs $q = p . \cos \omega + p' . \cos(\varphi - \omega)$ seyn. Aus dieser letztern Gleichung folgt sehr einleuchtend, dafs jede einfache Kraft q in eine gleichgültige (äquiva-

lente) Summe von zwei Kräften zerlegt werden kann, welche unter den Winkeln ω und $\varphi - \omega$, anstatt q auf einerlei Punct hinwirken.

III. Von der beschleunigten Bewegung auf geneigten Ebenen, und im Bogen einer Curve.

1. Die bekannte Zerlegung der Schwerkraft auf der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, als der lothrechten Durchschnitts-Ebene einer geneigten graden Fläche, giebt den Satz, daſs der Sinus des Neigungswinkels α der Coefficient für die freie Beschleunigung g seyn müsse. Daher entstehen die Ausdrücke

$$s = gt^2 . \sin\alpha,$$

$$t = \sqrt{\frac{s}{g . \sin\alpha}},$$

$$v = 2gt . \sin\alpha = 2\sqrt{gs} . \sin\alpha,$$

in welchen s den auf der schiefen Ebene in der Zeit t durchlaufenen Raum, und v die zugehörige Geschwindigkeit (Endgeschwindigkeit) bezeichnet. Setzt man die Höhe der geneigten Ebene $= a$, ihre Länge $= b$, so ist $a = b . \sin\alpha$. Durchläuft ein Körper den ganzen Raum, so erlangt er die Geschwindigkeit

$$v = 2\sqrt{bg} . \sin\alpha = 2\sqrt{ag}:$$

folglich ist die Geschwindigkeit am Ende der geneigten Ebene grade so groſs, als wenn der Körper in der Linie a lothrecht herabfällt.

2. Setzt man die Schwere an der Oberfläche der Erde $= 1$, so läſst sich anstatt des Coefficienten $\sin\alpha$, nach §. 59. Num. III. 3, aus der Proportion

$$1 : \frac{p}{m} = g : g\frac{p}{m},$$

ein allgemeiner Coefficient der beschleunigenden Kraft $= 1$, und Beschleunigung $= g$, nämlich $\frac{p}{m}$ einführen, welcher dem Quotienten aus der bewegenden Kraft p, dividirt durch die zu bewegende Masse m gleich ist. Das giebt für den durchlaufenen Raum, z. B. an der atwoodschen Fallmaschine, den Ausdruck

$$s = g\frac{p}{m}t^2 = \frac{mv^2}{4gp} = gt^2\frac{P-Q}{P+Q},$$

wenn P und Q die angehängten Gewichte sind;

$$v = 2gt\frac{p}{m} = 2gt\frac{P-Q}{P+Q} = 2\sqrt{\frac{gps}{m}}.$$

Auf eine ähnliche Weise lassen sich noch die Ausdrücke $s' = \frac{m'u^2}{4gp'}$ und $u = 2gt\frac{p'}{m'}$ machen. Daraus entstehen zwei berühmte Proportionen

$$p : p' = mv : m'u,$$
$$p : p' = mv^2 : m'u^2,$$

von denen die erstere das cartesianische, die letztere das leibnitzische Kräftemaafs genannt zu werden pflegt. Dort verhalten sich die bewegenden Kräfte, wie die Producte der Massen in die einfachen Geschwindigkeiten, hier wie die Quadrate der letztern multiplicirt mit jenen. So sehr sie einander zu widersprechen scheinen, ist doch Uebereinstimmung unter ihnen, wenn man auf den Ursprung der zweiten Proportion genauer achtet. Man mufs in ihr gleiche Räume s und s' zum Grunde legen, die in einerlei Zeit t durchlaufen werden, übrigens die bewegenden Kräfte p, p' und Massen m, m' verschieden annehmen. Die obigen Gleichungen geben

$$p:p' = \frac{m}{gt^2} s : \frac{m'}{gt^2} s' = \frac{m}{gt^2} \cdot \frac{v^2}{4g} : \frac{m'}{gt^2} \cdot \frac{u^2}{4g} = \frac{mv}{2gt} \cdot \frac{v}{2gt} : \frac{m'u}{2gt} \cdot \frac{u}{2gt} = mv : m'u;$$

weil hier $v = 2gt$ und $u = 2gt$, also $\frac{v}{2gt} = 1$ und $\frac{u}{2gt}$ ebenfalls $= 1$ ist. In dieser Gestalt drücken beide Proportionen ein richtiges Verhältnifs der Bewegungs-Gröfsen aus, und stimmen mit den phoronomischen Grundbegriffen §. 59, II. 4 und 6 überein.

3. Es sey in Fig. 3, PM die Richtung der Schwere, oder die Curve umgekehrt, und wie gewöhnlich $Mm = \partial s$, $qm = \partial y$: so stehen die Beschleunigungen in ∂y und ∂s im Verhältnisse

$$g : g\frac{p}{m} = 1 : \frac{p}{m} = \partial s : \partial y.$$

Das giebt die Ausdrücke

$$\frac{p}{m} \partial s = \partial y$$

$$\frac{p}{m} s = y.$$

Vermittelst des freien Falles durch y entsteht die Gleichung $y = \frac{v^2}{4g}$, und durch Differenziation kömmt $2g\partial y = v\partial v$.

Vermittelst des Umtausches erhält man folgende Differenziale und Integrale:

$$2g\frac{p}{m}\partial s = v\partial v,$$

$$2g\frac{p}{m}s = \tfrac{1}{2}v^2.$$

Aus der letztern Gleichung läſst sich ein Ausdruck für die Geschwindigkeit herleiten, welche ein Körper durch den beschleunigten Fall im Bogen $AM = s$ erlangt, nämlich

$$v = 2\sqrt{\frac{p}{m}gs} = 2\sqrt{gy},$$

woraus der Satz hervorgeht, daſs die Geschwindigkeit im Endpuncte des Bogens, ganz einerlei sey mit der zu y als Fallhöhe gehörigen Geschwindigkeit.

4. Hievon kann sogleich eine Anwendung auf die Bewegung des einfachen Pendels gemacht werden. Es sey in Fig. 6. der Halbmesser $AC = r$ zugleich die Pendellänge, m der Schwingungs-Punct, $Ap = b$, $Pp = \partial x = b - x$, die Zeit welche m gebraucht, um den Elongations-Winkel $ACm = \varphi$ oder den Bogen Am zu durchlaufen, $= t'$, und Mm wie gewöhnlich ∂s: dann ist die im Puncte M erlangte Geschwindigkeit $v = 2\sqrt{g(b-x)}$. Wird nun $\partial t'$ so angenommen, daſs $v\partial t' = \partial s$ gesetzt werden kann, so entsteht für $\partial t'$ die Gleichung

$$\partial t' = \frac{\partial s}{v} = \frac{\partial s}{2\sqrt{g(b-x)}}.$$

Die höhere Geometrie giebt für die Kreislinie das Bogendifferenzial $\partial s = \frac{r\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, hier also die Differenzial-Gleichung $\partial t' = \frac{r\partial x}{2\sqrt{g(b-x)(2rx-x^2)}}$, welcher das Integral $t' = \frac{\pi r^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2g}}\left[1 + \frac{b}{8r} + \frac{9b^2}{256r^2} + \ldots\ldots\right]$ zugehöret *). Es ist aber $b = r \,.\, \text{sinv}\, \varphi$, weshalb die Reihe in der Parenthese sehr schnell convergiren muſs, wenn man den Elongations-Winkel φ recht klein annimmt. Für $\varphi = 10^\circ$ ist das zweite Glied nur noch $= 0{,}001$, und kann deshalb schon vernachlässigt werden. Daraus folgt $t' = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ Schwingungs-Zeit für den halben Pendelschlag, oder $2t' = t = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ für den ganzen Schwung. Wenn $t = 1$ Secunde gesetzt wird, so ist $g = \frac{1}{2}r\pi^2$ ein Ausdruck für die freie Fallhöhe in der

*) M. s. Leonh. Euleri Mechan. Tom. II. §. 161—164.

ersten Secunde, wobei die Pendellänge r durch einen genauen Versuch gefunden werden muſs. Uebrigens lassen sich für zwei verschiedene Schwingungszeiten t und τ, die Pendellängen r und ϱ durch folgende Proportion bestimmen:

$$t : \tau = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}} : \pi \sqrt{\frac{\varrho}{2g}} = \sqrt{r} : \sqrt{\varrho},$$

das heiſst die Pendellängen verhalten sich, wie die Quadratzahlen der abzumessenden Zeiten. Hienach müſste z. B. ein Pendel, welches Viertel-Secunden schlagen soll, nur den sechszehnten Theil von der Länge des einfachen Secunden-Pendels haben.

5. Mit der Lehre von der Schwungbewegung oder vom Pendel, steht die Theorie der Schwungkraft in sehr genauer Verbindung. Es habe die am Ende des Halbmessers $r = BC$ Fig. 6. befindliche Masse m, während der Zeit t den Bogen BMA durchlaufen, und in A die Geschwindigkeit u erlangt: so läſst sich die in der nächstfolgenden differenziellen Zeiteinheit ∂t in dem Bogen $AE = \partial s$ fortgesetzte Bewegung in zwei andere, nämlich eine tangentielle $AD = u\partial t$ und eine centrale Ab zerlegen. Dabei ist es grade nicht nöthig, Ab, ∂s und $u\partial t$ schon als erste Differenziale, d. h. für beständige Gröſsen anzusehen; weil die weiter unten gezogenen Schlüsse auch für den Fall richtig sind, wenn erst die zweiten Differenzen beständig seyn sollten.

α.) Da zu dem in der Zeit $t + \partial t$ durchlaufenen Bogen $BMAE = s + \partial s$, die Gröſse $Bb = x = 2r - \partial x$ als Abscisse gehört: so erhält man durch die erste Differenziation ∂s, ∂t und $- \partial x = Ab$.

β.) Es sind $u\partial t$ und $- \partial x$ die Seiten eines Parallelogramms, also drücken sie nicht allein das Verhältniſs zweier ihnen proportionaler Geschwindigkeiten, sondern auch das Verhältniſs der beiden zugehörigen Kräfte aus. Um die Schwungkraft vermittelst der Centralkraft zu messen, welche letztere auf die Schwere zurückgebracht werden kann, kommt es darauf an, vermittelst des Verhältnisses $- \partial x : u\partial t$ zuförderst ein Paar proportionale Geschwindigkeiten ausfindig zu machen.

γ.) Dazu dient die Proportion

$$Bb : bE = bE : Ab$$

$$2r - \partial x : u\partial t = u\partial t : - \partial x,$$

welche die Differenzial-Gleichung $- 2r\partial x + \partial x^2 = u^2 \partial t^2$ giebt, wo ∂x^2 als un-

verkennbares drittes Binomial-Glied von $r^2 - 2r\partial x + \partial x^2$ wegfällt, sogar wenn ein zweites Differenzial zu entwickeln wäre. Daraus folgt $-\partial x = \frac{u^2}{2r}\partial t^2$.

δ.) Soll $-\partial x$ durch die Beschleunigung der Schwere gemessen werden, so muſs man es als einen Fallraum ansehen, durch welchen die Schwere die bewegte Masse in der Zeit ∂t führet. Das giebt

$$-\partial x = g\partial t^2 = \frac{u^2}{2r}\partial t^2$$

$$\text{oder} \quad 2g = \frac{u^2}{r},$$

einen Ausdruck für die durch den freien Fall in der ersten Zeiteinheit (Secunde) erlangte Geschwindigkeit, wenn die Kraft der Schwere mit dem Gewicht des fallenden Körpers einerlei $= \frac{m}{m} = 1$ ist.

ε.) Für eine andere Geschwindigkeit, wie die im Bogen AE, welche $= v \gtrless u$ seyn mag, erhält man zwar $2g \lessgtr \frac{v^2}{r}$, aber doch ein meſsbares Verhältniſs $2g : \frac{v^2}{r}$, wenn r und v gegeben sind, und nun lassen sich mit Hülfe dieser Geschwindigkeiten die zugehörigen Kräfte 1 und p oder $\frac{m}{m}$ und $\frac{p}{m}$ vergleichen; denn

$$\frac{m}{m} : \frac{p}{m} = 2g : \frac{v^2}{r}$$

$$\text{d. i.} \quad p = \frac{mv^2}{2gr}.$$

ζ.) Der hier gefundene Ausdruck für die Schwungkraft p, giebt die Proportionen

$$p : m = \frac{2v^2}{4g} : r$$

$$p : m = 2s : r$$

also den veränderten Ausdruck für die Schwungkraft

$$p = \frac{2ms}{r}$$

in welchem s die zur Geschwindigkeit v gehörige Fallhöhe $\frac{v^2}{4g}$ bezeichnet.

η.) Läſst man die Masse m durch einen ganzen Kreis $= 2r\pi$ laufen, so entstehen, vermöge der gleichförmigen Geschwindigkeit v, die Ausdrücke:

$$2r\pi = vt$$

$$\frac{4r^2\pi^2}{t^2} = v^2.$$

Wird dieser Werth von v^2 in die unter c zuerst erhaltene Gleichung für p eingeführt, so kommt

$$p = \frac{2mr\pi^2}{gt^2},$$

wodurch sich die Schwungkraft bestimmen läſst, wenn die umschwingende Masse m, der Halbmesser r an welchem, und die Zeit t in welcher sie umschwingt, bekannte Gröſsen sind.

§. 61.

IV. Vom Gleichgewicht entgegenwirkender schwerer Massen oder Kräfte am mathematischen Hebel.

Nach §. 59, II. 3. ist eine Gröſse der Ruhe der andern gleich, wenn die ruhenden Massen sich umgekehrt verhalten, wie die zu ihrer gegenseitigen Ruhe erforderlichen Zeiten. Hienach müssen die Zeiten verschieden seyn, wenn die Massen verschieden sind: folglich ist in $mt = m't'$ die Zeit $t < t'$, wenn $m > m'$ gesetzt wird. Es läſst sich aber vermittelst des Ausdrucks $mt = m't'$ unmittelbar nichts durch äussere Anschauung erkennen, weshalb die Zeiten mit gleichgültigen Raumgröſsen vertauscht werden müssen. Dazu dienen die Ausdrücke im §. 59, I. 6, nämlich $ct = s$, $t = \frac{s}{c}$. Um sicher zu seyn, daſs die Quotienten $t = \frac{s}{c}$ und $t' = \frac{s'}{c'}$ wirklich verschieden sind, nehme man entweder die Räume gleich und die Geschwindigkeiten verschieden, oder umgekehrt; weil, wenn Dividende und Divisoren ungleich wären, es möglich seyn würde $t = t'$ zu erhalten. Es sey also einmal $c = c'$, folglich $s < s'$: so giebt der Umtausch den Ausdruck

$$ms = m's'$$

und

$$m : m' = s' : s,$$

also das Verhältniſs der Massen umgekehrt, wie das Verhältniſs der Räume oder Kreisbogen, die sie **beschreiben würden**, wenn man den Hebel drehen wollte. Nun stehen aber diese Kreisbogen im graden Verhältnisse der Halbmesser oder Hebelsarme, an denen die Massen aufgehängt sind: folglich wird die Gröſse der entgegen wirkenden Kräfte durch das umgekehrte Verhältniſs der Ab-

stände ihrer Angriffspuncte (Aufhängepuncte) vom Ruhepunct bestimmt. Ein gleiches Resultat ergiebt sich, wenn $s = s'$ also $c > c'$ angenommen wird, um $t < t'$ zu erhalten. Es ist alsdenn

$$\frac{1}{c} m = \frac{1}{c'} m'$$

folglich $$m : m' = c : c'$$

das heiſst, die Massen verhalten sich umgekehrt, wie ihre Geschwindigkeiten, wenn sie mit dem Hebel gedreht werden sollten. Aber Geschwindigkeiten sind Räume in der Zeiteinheit durchlaufen, daher in diesem Fall wieder Kreisbogen, die verschiedenen Halbmessern oder Hebelsarmen angehören. Hier ist das Gesetz der Ruhe aus den Reflexions-Begriffen derselben abgeleitet, und eben dadurch vermieden worden, die in Ruhe befindlichen Massen kleine Bewegungen machen zu lassen, wie in der analytischen Mechanik von Lagrange, Abschn. 1. Grundges. 3. geschehen ist, um hieraus den Schluſs ziehen zu dürfen, daſs Massen in Ruhe sind, wenn ihre augenblicklichen Bestrebungen nach Bewegung mit ihnen selbst multiplicirt einerlei Product geben. Die augenblicklichen Bestrebungen nach Bewegung bedeuten hier soviel, als kleine Geschwindigkeiten, die wenn sie noch als Ruhe angesehen werden sollen, offenbar unendlich klein, oder Mitteldinge zwischen Etwas und Nichts seyn müssen. Aber da würde man einen Erklärungs- und Beweis-Grund annehmen, welchen die Theorie der analytischen Functionen für einen Irrthum erkläret. Ueberdem veranlaſst diese Beweisart noch die Frage, wie das angenommene Gesetz der Bestrebung nach Bewegung, sich mit dem ersten Gesetze der Mechanik, dem Gesetze der Beharrung, oder Gleichgültigkeit gegen Ruhe und Bewegung vereinbaren läſst.

V. Vom Princip der virtuellen Geschwindigkeit.

Wenn in einer Verbindung (System) entgegen wirkender Kräfte, die Abstände von einem gemeinschaftlichen Beziehungspuncte, der in mehreren Fällen der geometrische Mittelpunct einer gewissen Figur seyn kann, theils positiv theils negativ genommen, und mit ihren zugehörigen durch einerlei Einheit gemessenen Kräften multiplicirt werden: so entstehen entgegengesetzte Summen von Producten oder Momenten, die man algebraisch addiren kann.

So lange nun diese Summe von Momenten gleich Null ist, bleibt alles im Gleichgewicht.

Diesen letztern Satz nennt man das Princip der virtuellen Geschwindigkeit. Er läſst sich, wie es wirklich geschehen ist, auf mehr als eine Art beweisen. Iedoch gehört es nicht hieher, die verschiedenen Beweisarten geschichtlich aufzuführen. Um sich von seiner Wahrheit auf einem sehr kurzen Wege zu überzeugen, kann man entweder den Begriff von der Gröſse der Bewegung im §. 59, II. 6, oder von dem Maaſse der Kraft im §. 60, III. 2 zum Grunde legen, wo denn die eine Geschwindigkeit sich zur andern verhalten muſs, wie der eine Abstand (Radius-Vector) zum andern. Indessen da dies eigentlich nichts anders ist, als das Gesetz des Gleichgewichts am Hebel: so kann man von diesem unmittelbar den Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeit hernehmen. Es sey demnach

1. die Summe der entgegen gesetzten Momente auf beiden Seiten gleichzählig, wie etwa $a + b = -\alpha - \beta$, so werden sich je zwei dieser Gröſsen für sich zu Null machen, also zwischen je zweien und eben darum auch im Ganzen ein Gleichgewicht vorhanden seyn.

2. Wenn aber das Entgegengesetzte auf beiden Seiten nicht gleichzählig wäre, wie etwa $a + b = -\alpha$: so würde sich doch α in eben so viele Theile $-\beta$ und $-\gamma$ zerlegt gedenken, und jeder so groſs annehmen lassen, daſs β mit a, γ mit b für sich im Gleichgewichte bleiben müſste. Hieraus folgt alsdann im Ganzen

$$a + b + \beta + \gamma = 0$$
$$a + b \quad + \alpha \quad = 0,$$

das heiſst, das Entgegengesetzte bleibt in Ruhe. Mehr ist hier nicht nöthig, um die Wahrheit des vorhergehenden sehr fruchtbaren Satzes im Allgemeinen einzusehen.

VI. Die Lehre vom Schwerpunct.

Iede Reihe von schweren Puncten a, b, c, d in Fig. 2, läſst sich auf eine grade Linie AD so beziehen, daſs unter allen möglichen Ordinaten Aa, Bb, Cc u. s. w. eine ausgemittelt werden hann, welche den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpuncts für a, b, c, d von AD bestimmt. Diese Ordinate heiſst ein Durchmesser der Schwere. Ist eine Menge schwerer Puncte

über einen Bogen, oder über eine Ebene verbreitet, so lassen sich zwei solcher Durchmesser der Schwere finden, deren gemeinschaftlicher Durchschnittspunct die Stelle des Schwerpuncts bezeichnet. Für einen nach allen drei Abmessungen erfüllten Raum, sind insonderheit bei allen unregelmäſsigen Körpern drei solcher Durchmesser, oder wenn man will, drei Ebenen der Schwere nöthig.

1. Um den gemeinschaftlichen Schwerpunct für das lineare System a, b, c, d zu bestimmen, kann Kürze halber die Entfernung $ab = \alpha$, $bc = \beta$, $cd = \gamma$, $Aa = a$, $Bb = b$, $Cc = c$, $Dd = d$, das Gewicht in $a = p$, in $b = q$, in $c = q'$, in $d = q''$ gesetzt, und zwischen je zwei Ordinaten eine gleichlaufende dritte, z. B. η zwischen Aa und Bb, gedacht werden.

2. Um den Ruhepunct zwischen a und b zu finden, mag der eine Theil der in Gedanken zu ziehenden graden Linie y, der andere $\alpha - y$ genannt werden: so muſs nach den Gesetzen des Gleichgewichts am Hebel $py = q(\alpha - y)$ seyn. Daher die Proportionen

$$\begin{aligned} p : q &= \alpha - y : y \\ p + q : q &= \alpha \quad\;\; : y \\ &= a - b : a - \eta \end{aligned}$$

zufolge des in abK liegenden ähnlichen Dreiecks, dessen Spitze mit dem Endpuncte von η zusammenfällt. Daraus folgt die Gleichung

$$\eta = \frac{ap + bq}{p + q}$$

das heiſst der Satz:

> die Summe der Momente dividirt durch die Summe der schweren Puncte, giebt den Abstand η ihres gemeinschaftlichen Schwerpuncts von AE.

3. Denkt man sich in diesem letztern das vereinigte Gewicht $p + q = p'$, so findet sich auf eine ganz ähnliche Weise ein Ausdruck für p' und q', nämlich

$$\eta' = \frac{\eta p' + cq'}{p' + q'}.$$

Es ist aber $\eta p' = \eta(p+q) = ap + bq$, folglich läſst sich dieser Ausdruck vertauschen mit

$$\eta' = \frac{ap + bq + cq'}{p + q + q'},$$

und zuletzt erhält man für die Summe aller schweren Puncte die Gleichung

$$\eta'' = \frac{ap + bq + cq' + dq''}{p + q + q' + q''},$$

welches noch derselbe Satz unter Num. 2. ist. Man sieht leicht ein, daſs in der Curve *abcdE* so viele Puncte mit ihren Ordinaten als man will nicht nur auf die Linie *AE*, sondern auch auf ihre Normale *Aa*, theils positiv theils negativ (mit positiven oder negativen Momenten) bezogen, und für jedes Paar solcher Coordinaten zwei Abscissen $CE = z$ und $AN = z'$ gefunden werden können, deren Perpendikel *Cm* und *No* sich im Schwerpuncte *M* schneiden.

4. Zufolge des obigen Lehrsatzes unter Num. 2, hat man für den Bogen *abcdE*, wenn *E* den Scheitel der Curve bezeichnet, die Summe aller Momente nach der Richtung $x = \int x\partial s$, nach der Richtung $y = \int y\partial s$, und die Summe aller Gewichtstheile $= s$: folglich die beiden Ausdrücke für z und z', nämlich

$$z = \frac{\int x\partial s}{s},$$

$$z' = \frac{\int y\partial s}{s},$$

in welchen für jede besondere Curve das Bogendifferenzial entweder durch x oder y allein auszudrücken ist, um eine integrirbare Function zu erhalten. Für die Parabel z. B. ist das Integral $\int x\partial x = \frac{1}{32}(8x+p)\sqrt{(4x^2+px)} + \frac{p^2\sqrt{p}}{32[4x+\sqrt{(4x+p)}]}$, welches durch den Bogen $s = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+px)} + \frac{1}{4}p \log n \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{(4x+p)}}{\sqrt{p}}$ dividirt werden muſs. Die andere Gröſse $z' = \frac{\int y\partial s}{s}$ ist $\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}\sqrt{p} - p^2}{12s}$.

5. Um den Schwerpunct einer Ebene zu bestimmen, muſs einmal die Summe der Momente für $x, = \int yx\partial x$, und das anderemal dieselbe für $y, = \int y^2\partial x$, durch das Gewicht der ganzen Ebene $= f = \int y\partial x$ dividirt werden. Daher die allgemeinen Ausdrücke

$$z = \frac{\int yx\partial x}{f} = \frac{\int yx\partial x}{\int y\partial x},$$

$$z' = \frac{\int y^2\partial x}{2f} = \frac{\int y^2\partial x}{2\int y\partial x},$$

von denen der letztere nur eine Ordinate geben soll, welche bis in die Mitte des Flächenelements $y\partial x$ reicht, folglich durch 2 dividirt werden muſs. Wenn aber

die Fläche einer Curve von congruenten Schenkeln begränzt ist, so genügt z allein, den Schwerpunct zu bestimmen, der nun um den Abstand z vom Scheitel, in der Axe liegt. Für die Parabel hat man diese Größe $= \frac{3}{5}x$, und für den Kreis $= \dfrac{(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{12}ax)\sqrt{(ax - x^2)} + \frac{1}{8}a^3 \text{ arc tang} \sqrt{\frac{x}{a-x}}}{(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}a)\sqrt{(ax - x^2)} + \frac{1}{4}a^2 \text{ arc tang} \sqrt{\frac{x}{a-x}}}$.

6. Bei einem Körper, welcher durch Umdrehung einer Curve um ihre Axe entstanden ist, bedarf man auch nur den Abstand z vom Scheitel allein. Folglich ist die Summe der statischen Momente für die Abscisse $= \pi \int y^2 x \partial x$ durch das Gewicht des ganzen Conoids $= k = \pi \int y^2 \partial x$ zu dividiren. Das giebt allgemein

$$z = \frac{\int y^2 x \partial x}{\int y^2 \partial x},$$

welcher Ausdruck nach Maaßgabe der Gleichung für eine besondere Curve umgeändert werden muß. So erhält man z. B. für den Abschnitt einer Kugel und eines Ellipsoids, welches durch Umdrehung der krummen Linie um ihre große Axe entstanden ist, $z = \dfrac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$.

VII. Vom centralen Stoße bewegter Körper.

Wenn eine körperliche Masse sich fortschreitend bewegt, so ist ihre Richtung bestimmt, sobald man die Richtung ihres Schwerpuncts kennt. Geht die letztere durch den Schwerpunct eines andern entweder bewegten oder in Ruhe befindlichen Körpers: so entsteht ein centraler Stoß, im Gegentheil ein excentrischer. Die Erscheinungen des letztern lassen sich mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte aus den Gesetzen des erstern herleiten, zu deren Kenntniß die Differenzial-Rechnung auf einem sehr kurzen Wege führet. Es ist nur nöthig folgendes vorauszusetzen:

1. daß die aufeinander stossenden Körper hier entweder als vollkommen unelastisch oder elastisch betrachtet werden;
2. daß die letztern ihre veränderte Figur mit eben der Gewalt wieder herzustellen streben, welche angewandt werden mußte, sie bis auf einen gewissen Grad zusammen zu drücken;
3. daß dieses Bestreben einerlei ist mit einer bewegenden oder Widerstand leistenden Kraft, folglich eine ihm angemessene Wirkung hervorbringen muß;

4. daſs der gestossene Körper, er mag in Ruhe seyn, oder sich bald nach einerlei, bald nach einer entgegengesetzten Richtung bewegen, in jedem Fall ein Hinderniſs für den stoſsenden ist: folglich seine Bewegung (d. h. Geschwindigkeit, sofern die Masse unverändert bleibt, und durch diese die Gröſse der Bewegung keine Veränderung leidet) vermindert.

5. daſs dieses Hinderniſs der Bewegung, oder dieses Entgegenwirken, nicht eher aufhören könne, als bis der gestoſsene Körper so schnell ausweicht, wie der stoſsende ihm folgt, das heiſst, bis die Geschwindigkeit beider nach dem Anstoſse gleich groſs geworden ist.

Lauter Sätze, die ganz klar sind, und sich auf §. 59. Num. I, II, III gründen.

A. Vom centralen Stoſse vollkommen unelastischer Körper *).

1. Es sey in Fig. 5. der Schwerpunct A der stoſsenden Masse m, vom Schwerpuncte B der gestoſsenen m', im Anfange des Stoſses um den Abstand s entfernt; die Geschwindigkeit der ersteren $= c$, der letztern $= c'$; aber am Ende der Zeit t der Abstand $= BP = s - x$, $c = v$, $c' = u$, und der Widerstand welchen m leidet $= p$ geworden: so ist, wenn man die veränderte Bewegung als einen Erfolg des freien Falles betrachtet,

$$\partial v = -2g\frac{p}{m}\partial t,$$

$$\partial u = 2g\frac{p}{m'}\partial t$$

$$-m\partial v = 2gp\partial t = m'\partial u$$

$$\text{Const} - mv = m'u$$

$$\text{Const} = mv + m'u,$$

die Summe der Bewegungen also, wie im Anfange, wo $x = 0$ war, einer beständigen Gröſse C gleich, und $mv + m'u = cm + c'm'$.

2. Der Stoſs höret, nach der fünften Voraussetzung auf, wenn $v = u$ geworden ist. Daher entstehen die Ausdrücke:

*) Vergl. W. J. G. Karsten's Lehrbegr. der ges. Math. Th. 4. Abschn. 15, ingl. Comment. Petrop. Tom. V. pag. 159; Mem. de l'Acad. Pruss. 1740 pag. 50. Uebrigens läſst sich diese Theorie auch noch auf eine andere Art mit Hülfe der Diff. Rechn. darstellen.

$$\text{I.}\quad v = u = \frac{cm + c'm'}{m + m'}$$

$$= c - \frac{m'(c - c')}{m + m'}$$

$$= c' + \frac{m(c - c')}{m + m'};$$

$$\text{II.}\quad mc - mv + m'c' - m'u = o$$

$$m(c - v) + m'(c' - u) = o.$$

Der erstere zeigt, wie viel c nach dem Stoſse verloren, und wie viel dagegen c' gewonnen hat.

3. Ist die Masse m' in einer entgegen gesetzten Bewegung begriffen, so wird die gemeinschaftliche Geschwindigkeit v nach dem Stoſse $= \frac{cm - c'm'}{m + m'}$; und wenn m' in Ruhe, das heiſst $c' = o$ war, $v = \frac{cm}{m + m'}$. Für $m = m'$ hat man den allgemeinen Ausdruck $v = \frac{m(c \pm c')}{2m} = \frac{1}{2}(c \pm c')$.

B. Vom centralen Stoſse vollkommen elastischer Körper.

1. Setzt man den Weg um welchen m während der Zusammenpressung in der Zeit t vorwärts gerückt ist $= y$, und den Raum, um welchen der Schwerpunct B sich unterdessen in derselben Richtung AB vorwärts bewegt hat, $= z$: so geben die vorhergehenden, unter A. Num. 1. befindlichen Gleichungen $m\partial v = -2gp\partial t$ und $m'\partial u = 2gp\partial t$, wenn ∂t aus bekannten Gründen mit $\frac{\partial y}{v}$ und $\frac{\partial z}{u}$ vertauscht, wie auch um der folgenden Constante willen *) jedes Differenzial $v\partial v$ und $u\partial u$ mit seinem natürlichen Coefficienten 2 versehen wird, die Ausdrücke:

$$2mv\partial v = -4gp\partial y,$$

$$2m'u\partial u = +4gp\partial z,$$

$$2mv\partial v + 2m'u\partial u = 4gp(\partial z - \partial y).$$

---

*) Es würde $mv^2 + m'u^2 = 2$ Const. anstatt $mv^2 + m'u^2 =$ Const. kommen, welches jedoch insofern einerlei ist, als unter der ganzen Constante nur Eine beständige Gröſse gedacht werden kann.

2. Der Abstand beider Schwerpuncte am Ende des Stofses ist $s+z-y=s-x$, zufolge der obigen Voraussetzung unter *A*, 1: daher $\partial z-\partial y=-\partial x$.

3. Dieser Werth von $\partial z-\partial y$ in der letzten Gleichung unter Num. 1 gebraucht, giebt

$$2mv\partial v+2m'u\partial u=-4gp\partial x$$
$$mv^2+m'u^2=\text{Const}-4g\int p\partial x.$$

4. Es sey $\int p\partial x$ eine Function von x, welche es wolle, so wird man, wenn für $x=0$ der Ausdruck nicht unendlich wird, auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens eine beständige Gröfse $=a$, und die Gleichung erhalten:

$$mv^2+m'u^2=a.$$

5. Aber für $x=0$ ist auch hier, wie oben unter *A* Num. 1, $v=c$ und $u=c'$: folglich, da die Wirkung des Stofses zu Ende ist, wenn die Figur beider Körper sich hergestellt und eben dadurch den Abstand ihrer Schwerpuncte $=AB=s$ wieder gegeben hat,

$$mcc+m'c'c'=mv^2+mu^2$$
$$m(cc-v^2)+m'(c'c'-u^2)=0.$$

6. Dividirt man diese letzte Gleichung durch *A* Num. 2, II, so kommt

$$(c+v)-(c'+u)=0,$$
$$c+v=c'+u,$$
$$\text{III.}\quad c-c'+v=u.$$

7. Wird dieser Werth von u in *A*, 2, II gebraucht, so entstehen die Ausdrücke:

$$m(c-v)+m'(c'-c+c'-v)=0$$
$$c(m-m')-v(m+m')+2m'c'=0.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{c(m-m')+2m'c'}{m+m'}=v=c-\frac{2m'(c-c')}{m+m'}.$$

8. Dieser Werth von v in III eingeführt, giebt eine von v unabhängige Gleichung für die Geschwindigkeit des elastischen Körpers m' nach dem Stofse, nämlich

$$\text{V.}\quad u=\frac{2cm-c'(m-m')}{m+m'}=c'+\frac{2m(c-c')}{m+m'}.$$

9. Vergleicht man IV und V mit I, so fällt gleich in die Augen, daſs die elastische Masse m doppelt so viel von ihrer Geschwindigkeit verliert, dagegen der federharte Körper m' doppelt soviel an seiner Geschwindigkeit gewinnt, als wenn keine Elasticität vorhanden ist.

10. Es ist nicht schwer IV und V in Ausdrücke für den Fall zu verwandeln, wo m' eine entgegen gesetzte Richtung der Bewegung vor dem Stoſse hat; weil hier nur die Geschwindigkeit c' mit dem entgegen gesetzten Zeichen versehen werden darf. Das giebt die allgemeinen Ausdrücke

$$\text{VI.} \quad v = \frac{c(m - m') \pm 2c'm'}{m + m'};$$

$$\text{VII.} \quad u = \frac{2cm \mp c'(m - m')}{m + m'};$$

wo das obere Zeichen für einerlei, das untere für entgegen gesetzte Richtungen der Körper m und m' vor dem Stoſse gilt.

11. Eben so leicht lassen sich die Abänderungen dieser Ausdrücke für diejenigen Fälle machen, welche Statt finden, wenn entweder die Geschwindigkeiten oder die Massen gleich genommen werden, oder auch, wenn die Geschwindigkeit $c' = 0$ ist. Wäre z. B. $m = m'$, so würde $v = \pm c'$ und $u = c$; für $c = -c'$ hingegen $v = \frac{c(m - 3m')}{m + m'}$ das heiſst, unter der Bedingung $m < 3m'$ rückgängig, und $u = \frac{c(3m - m')}{m + m'}$ unter der Bedingung $3m > m'$ vorwärts gehend werden.

12. Vermittelst dieser einfachen Ausdrücke unter *A* Num. 3, und *B* Num. 10, VI und VII, lassen sich die mechanischen Erscheinungen sowohl bei den bekannten Percussionsversuchen mit Pendeln, z. B. an der nolletschen Stoſsmaschine, als auch an bewegten Körpern anderer Art erklären und berechnen, der Stoſs mag ein grader oder schiefer seyn, das heiſst, einen ebenen Theil der Oberfläche der gestoſsenen Masse unter einem rechten oder schiefen Winkel treffen. Eben darum ist diese Lehre für die Mechanik besonders wichtig.

Anmerkung. Dieser und der vorhergehende Paragraph enthält alles, was man in vollständigern Lehrbüchern der Physik bedarf, um die schwereren Lehrsätze ihres mechanischen Theils zu demonstriren.

§. 62.

Es giebt kein Theil der angewandten Grösenlehre so viele Gelegenheit, sich von der Wahrheit der ersten Grundbegriffe des Differenzial-Kalkuls zu überzeugen, als die Mechanik. Hier lösen sich mehrere objective Grösen so sichtbar in Reihen auf, dass man, bei einiger Aufmerksamkeit, den ersten Satz der Differenzial-Rechnung von selbst gewahr werden muss:

1. Iede veränderliche Grösse stellt eine Reihe dar.

Insonderheit eignen sich hiezu die steigenden und fallenden Reihen der beschleunigten Bewegung, theils im freien, theils auch im widerstehenden Mittel. Eben diese Reihen dienen zur Bestätigung der folgenden Sätze:

2. Mit keiner veränderlichen Grösse kann unmittelbar gerechnet werden;

3. Iede abgeleitete Function oder Differenz, welche zu einer Differenzial-Gleichung angewandt wird, muss sich nicht mehr differenziell verändern, sondern beständig geworden seyn.

Denn man nehme nur einmal die der Richtung der Schwere entgegen gesetzte Bewegung der Körper im freien Mittel, so müssen von der anfänglichen Geschwindigkeit v nacheinander die graden Zahlen $2g$, $4g$, $6g$, $8g \ldots\ldots t.2g$ abgezogen werden. Das giebt, wenn die beständige Differenz $2g = d$ gesetzt wird, die fallende arithmetische Reihe vom ersten Range:

$$v + (v - d) + (v - 2d) + (v - 3d) + \ldots\ldots + (v - td),$$

in welcher das allgemeine Glied die noch übrige Geschwindigkeit am Ende der t-ten, oder am Anfange der $(t+1)$ten Zeiteinheit ausdrückt. Der mit der gleichförmig abnehmenden Geschwindigkeit v durchlaufene Raum ist, zufolge des §. 59, I, 6, am Ende der Zeit $t = \frac{1}{2}t[v + (v - td)] = tv - \frac{1}{2}t^2 d = tv - gt^2$. Iede Gleichung, in welcher die anfängliche oder eine der schon differenziell veränderten Functionen von v, wie $v - d$, $v - 2d$, $v - td$ gradezu gebraucht wird, bringt ein falsches Resultat hervor; denn es ist weder $x = tv$, noch $x = t(v - d)$, noch $x = t(v - td)$, weil keine dieser einzelnen Geschwindigkeiten

für die ganze Zeit t der Veränderung, sondern bloſs für ihre einzelne Zeiteinheit $\frac{1}{t}$ gilt, mit welcher sie aufhört. Sieht man die obige Reihe an, als eine Folge von ersten veränderlichen Differenzen: dann ist eben so wenig eine unter allen Gleichungen für die ganze Zeit der Veränderung gültig, folglich jeder besondere Ausdruck wieder falsch und unbrauchbar. Hieraus leuchtet die Nothwendigkeit ein, daſs kein Glied aus der Hauptreihe jemals zu einer für alle aufeinander folgenden Zustände der veränderlichen Gröſse geltende, oder zu ihrer Berechnung fähigen Gleichung tauge; und eben so kein Glied aus einer Differenzenreihe eher zu einer solchen Gleichung gebraucht werden könne, als bis eine Beständigkeit der Differenzen oder ihrer Haupttheile zum Vorschein kommt. Dadurch läſst sich nun die folgende Definition des leibnitzischen Kalkuls rechtfertigen:

4. Die Differenzial-Rechnung ist eine Rechnung mit beständigen Differenzen, welche jede sich ununterbrochen und nach irgend einem Gesetze verändernde Gröſse als Reihe geben muſs.

Eben darum ist auch die obige Definition eines Differenzials im §. 31. vollkommen richtig:

5. Iedes Differenzial ist eine beständige Differenz, oder das beständige Hauptglied einer zusammengesetzten Differenz.

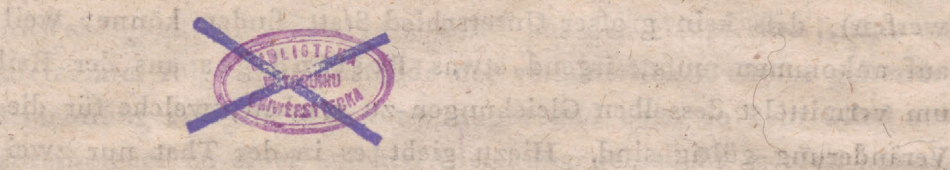
Warum es im letztern Fall das Hauptglied genannt werden müsse, und alle übrigen theils entbehrlich theils hinderlich werden, das ist im ersten und zweiten Abschnitte dieser zweiten Abtheilung vollständig dargethan worden. Es hängt nämlich von diesem Gliede allein das Integral ab. Eben so unumstöſslich wie die vorhergehende, wird endlich auch folgende Definition seyn:

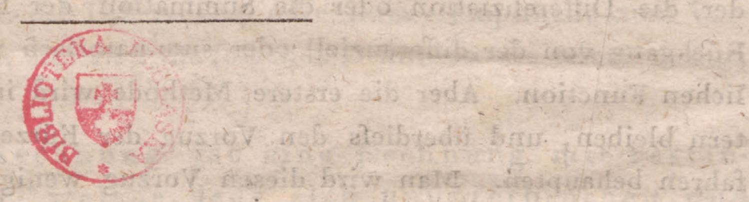
6. Ein Integral ist das Anfangsglied einer Hauptreihe, welche eine differenziell veränderliche, dem gegebenen Differenzial zugehörige Gröſse vorstellt.

Diese Definitionen und Lehrsätze, wird künftig jede Anleitung zum Differenzial- und Integral-Kalkul aufnehmen müssen, in welcher es, ausser den bloſs

mechanischen Verrichtungen, auch auf ein deutliches Verständniſs der innern Beschaffenheit und wahren Gründe desselben ankommt. Mag man sich es als möglich denken, daſs noch irgend eine andere Rechnung mit veränderlichen Gröſsen zu erfinden sey: so werden doch diese letztern selbst, immer wie Reihen betrachtet und als solche behandelt werden müssen. Da zeigt sich aber schon im Voraus (ohne hier einen Rückblick auf die sogenannte Fluxions-Rechnung zu werfen), daſs kein groſser Unterschied Statt finden könne; weil es immer darauf ankommen muſs, irgend etwas Beständiges aus der Reihe zu erhalten, um vermittelst desselben Gleichungen zu machen, welche für die ganze Zeit der Veränderung gültig sind. Hiezu giebt es in der That nur zwei Wege, entweder die Differenziation oder die Summation der Reihe, und den nachherigen Rückgang von der differenziell oder summatorisch umgeformten, zu der anfänglichen Function. Aber die erstere Methode wird immer das Kriterium der letztern bleiben, und überdieſs den Vorzug der Kürze in dem mechanischen Verfahren behaupten. Man wird diesen Vorzug wenigstens jetzt überall inne, wo man jene mit andern bei der höhern Geometrie und Mechanik angewandten Verfahrungsarten vergleicht. Denn der Differenzial-Kalkul braucht einen eben so geringen Aufwand von Worten, als von Zeichnung und Betrachtung geometrischer Figuren, um Rechnungs-Aufgaben zu bestimmen, zu deren Auflösung man mit Hülfe der elementar-geometrischen Construction entweder gar nicht, oder nur mit unverhältniſsmäſsiger Mühe gelangen kann. Es würde überflüssig seyn, hier noch andere Vergleichungen dieser Art anzustellen, da wenige Ueberlegung erforderlich ist, um einzusehen, daſs der Differenzial-Kalkul, theils in Hinsicht seines fruchtbaren Gebrauchs, theils in Hinsicht seiner lichtvollen Kürze, von keiner andern Rechnung mit veränderlichen Gröſsen jemals übertroffen werden wird. Mit Recht kann man diese Bemerkung auf den neuern Functionen-Kalkul beziehen, welcher in der That nichts anders, als eine besonders bezeichnende Differenzial- und Integral-Rechnung ist. Wenn jener dieser sinnreichen leibnitzischen Analyse, die schon länger als ein Iahrhundert Licht und Gedeihen über den mathematischen Theil der Wissenschaften verbreitet hat, jetzt ihren ursprünglichen und wesentlich richtigen Namen streitig macht, um sich dadurch das Ansehen einer gröſsern Gründlichkeit und innern Konsequenz zu geben: so kann ohne Zweifel nur derjenige durch neue Namen getäuscht

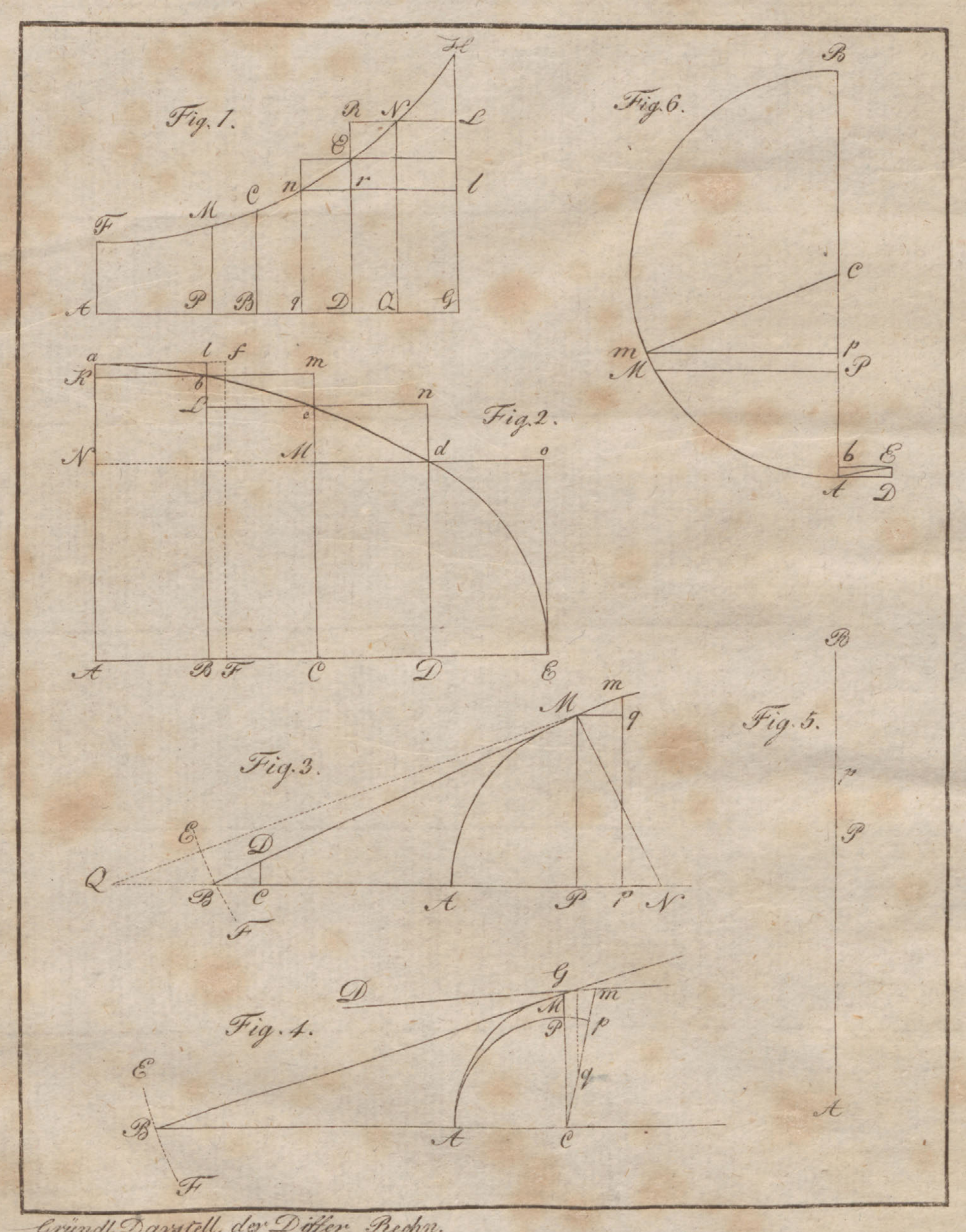
werden, dem die weit festere Begründung der Differenzial-Rechnung noch fremde ist. Mag der veränderliche Geschmack an Formen, andern Erfindungen ein unholdes Schicksal bereiten, und manche schnell der Vergessenheit überliefern,: wie die mathematischen Wahrheiten aus Pythagoras und Euklids Zeiten immer noch in völliger Kraft dastehen, so wird auch der leibnitzische Kalkul nie veralten.





Druckfehler.

Seite	Zeile	ist zu lesen	anstatt
7	13	$(x+\partial x)(y+\partial y)(z+\partial z)$	$(x+\partial x)(y+\partial y)z+\partial z)$
15	7	in	im
26	30	vir	vis
27	3	den	denn
52	28	von	ven
55	21	Verhältniſs	Verhaitniſs
94	5	Polygon	Polygen
125	9	Differenzial	Differenziel
128	23	irrigen	irrigem
155	24	welches	welkes.
164	33	der einen	dereinen.



Gründl. Darstell. der Differ. Rechn.



